Bauschi

ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK.

TEXT.

ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK

VON

J. BAUSCHINGER,

ORD. PROFESSOR DER TECHNISCHEN MECHANIK UND GRAPHISCHEN STATIK
AN DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN MÜNCHEN.

ZWEITE AUFLAGE.

MIT 72 FIGUREN IM TEXT UND EINEM ATLAS.

MÜNCHEN.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.
1880.

Inhaltsverzeichniss.

VI. Abschnitt.

Kräfte im Raume.

VII. Abschnitt.

Parallele Kräfte im Raume und in der Ebene; ihr Mittelpunkt; ihre statischen Momente.

VIII. Abschnitt.

Vom Schwerpunkt.

Schwerpunkt materieller Linien.

Schwerpunkt ebener Figuren.

Schwerpunkt von Oberflächen.

Schwerpunkt von Körpern.

IX. Abschnitt.

Höhere Momente und Trägheitsmoment paralleler Kräfte. Trägheitsfläche und Centralfläche.

X. Abschnitt.

System paralleler Kräfte, deren Intensitäten den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Ebene proportional sind. Centralellipsoid, Centralellipse und Kern von Körpern und ebenen Figuren (Querschnitten).

Centralellipse und Kern ebener Figuren (Querschnitte).

Centralellipsoid und Kern einiger Körper.

XI. Abschnitt.

Anwendungen.

Kette und Bogen.

Der Balken.

Das Fachwerk.

I. Abschnitt.

Einleitung.

§ 1. Zeitgrössen können in Zahlen ausgedrückt oder durch Linien dargestellt werden. — Die Mechanik beschäftigt sich nicht bloss mit Zahlen- und Raumgrössen, wie die Mathematik, sondern auch mit Zeit- und Kraftgrössen. Die beiden letzteren aber werden entweder durch die eine oder durch die andere der beiden erstgenannten Grössen ausgedrückt.

Zeitgrössen werden in Zahlen angegeben, indem man eine bestimmte Zeit, die Secunde oder Minute, die Stunde oder den Tag, als Einheit annimmt und zusieht, wie oftmal diese in der gegebenen Zeit enthalten ist. — Um eine Zeitgrösse geometrisch, als Raumgrösse, darzustellen, wählt man ein meist gerades Stück Linie, durch welches man die Zeiteinheit repräsentirt, und dann stellt diejenige gerade Linie, deren Länge sich zu jenem Stücke verhält wie die gegebene Zeitgrösse zur Zeiteinheit, die erstere dar.

Die erste Methode wird überall da gebraucht, wo die Bewegung der Körper rechnerisch (analytisch) behandelt wird. Die letztere dient zur graphischen Darstellung der Bewegungen, indem gewöhnlich die Zeit als Abscisse und der Weg oder die Geschwindigkeit etc. als zugehörige Ordinate aufgetragen wird. Solche Darstellungen oder Aufzeichnungen werden auch von gewissen Apparaten, die zur Untersuchung einer vorliegenden Bewegung dienen sollen, gemacht, und man nennt diese Apparate dann selbstregistrirend. Als Beispiel hierfür mögen die Morin'sche Fallmaschine und die Schreibvorrichtung an dem gleichfalls von Morin angegebenen und gebrauchten Apparate zur Bestimmung der Reibung der Körper angeführt werden.

§ 2. Kräfte können durch Zahlen bestimmt oder durch Linien dargestellt werden. — Eine Kraft ist nicht bloss ihrer Grösse nach zu bestimmen, sondern es muss auch ihre Richtung und ihr Sinn sowie ihr Angriffspunkt angegeben werden, oder, da letzterer in ihrer Richtung beliebig verlegt werden darf, ihre Richtung, ihr Sinn und ihre Lage, d. h. irgend ein Punkt, durch den sie geht. Um also eine Kraftgrösse durch Zahlen vollständig zu bestimmen, hat man erstens ihre Grösse auszudrücken, indem man eine Kraft von bestimmter Intensität als Einheit annimmt und angibt, wie oftmal dieselbe in der gegebenen Kraft enthalten ist; zweitens ist Richtung und Sinn durch die trigonometrischen Functionen der Winkel zu geben, welche dieselbe mit drei festen Richtungen im Raume (Coordinatenaxen) bildet; und drittens endlich muss ein Punkt, durch den diese Richtung geht, gewöhnlich der Angriffspunkt der Kraft, durch seine Coordinaten in Bezug auf jenes Axensystem bestimmt werden. Dieser Methode bedient man sich da, wo die Aufgaben der Mechanik rein rechnerisch (analytisch) behandelt werden.

Viel einfacher ist die Darstellung einer Kraft auf geometrischem Wege, als Raumgrösse. Wählt man ein Stück gerader Linie als Krafteinheit, so kann jede gegebene Kraft ihrer Grösse, ihrer Richtung, ihrem Sinne und ihrer Lage nach durch Länge, Richtung, Sinn und Lage einer

geraden Linie repräsentirt werden. Diese Art der Darstellung liegt so nahe, dass sie eigentlich von jeher in der Mechanik gebräuchlich ist und auch da mitangewendet wird, wo die Behandlung im Wesentlichen eine analytische ist.

§ 3. **Methode der graphischen Statik. Bezeichnungsweisen.** — Derjenige Theil der Mechanik, den man die Statik nennt, hat es bloss mit Kraft-, nicht mit Zeitgrössen zu thun; er lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, die auf einen Körper wirken, und entwickelt hieraus die Bedingungen für das Gleichgewicht derselben. Die graphische Statik sucht diese Aufgabe auf rein geometrischem Wege durch Constructionen zu lösen, indem sie sich der zuletzt angegebenen Darstellungsweise der Kräfte als Raumgrössen ausschliesslich bedient.

Wir bezeichnen eine Kraft, wenn wir von ihr sprechen, in der Regel mit dem Buchstaben P, ihren Angriffspunkt durch A. Sind mehrere Kräfte vorhanden, so versehen wir, um sie von einander zu unterscheiden, jene Buchstaben P und A mit den Zeigern 1, 2, 3 ... n. An das Ende der geraden Linie, welche eine Kraft repräsensirt, setzen wir den Buchstaben P, bezw. P_1, P_2 ..., an den Anfangspunkt, gleichviel ob er wirklich der Angriffspunkt der Kraft ist oder nicht, A, bezw. A_1, A_2 .... Dadurch ist zugleich der Sinn, in welchem die Kraft in der durch jene Linie dargestellten Richtung wirkt, unzweideutig angegeben. Doch werden wir, wo es leicht geschehen kann, diesen Sinn auch noch durch Pfeilspitzen hervorheben, die wir an das Ende oder irgendwo hin zwischen Anfang und Ende der betreffenden Linie setzen.

Wenn jedoch mehrere Kräfte, bezw. die sie repräsentirenden Linien, an einander gereiht werden, jede mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden, wie z. B. in den Figuren 1 bis 6 und 8[1] (auf S. 3 bis 5), so begnügen wir uns, an den Anfangspunkt der ersten 0 zu setzen und an den Endpunkt einer jeden bloss den Index derselben 1, 2 ... n. Eine Zweideutigkeit kann dadurch, auch wenn gar keine Pfeilspitzen gebraucht werden, nicht entstehen; denn irgend eine Kraft (P_4 z. B.), bezw. die sie repräsentirende Linie, reicht dann eben von dem Punkte, der mit einer um 1 niedrigeren Ziffer als ihr Index bezeichnet ist (3), bis zu dem Punkte, an welchem ihr Index steht (4). In ähnlicher Weise werden wir manchmal eine Kraft der Kürze halber auch bloss mit dem Index 1, 2, 3 ... bezeichnen, den wir sonst an den Buchstaben P setzen.

Wenn wir endlich eine durch eine Linie repräsentirte Kraft durch die beiden Buchstaben oder Ziffern benennen, welche an deren Endpunkten stehen, so schreiben wir diese immer in solcher Ordnung, dass dieselbe zugleich den Sinn zu erkennen gibt, in welchem die Kraft in der Linie wirkt, nämlich zuerst den Angriffspunkt und dann den Endpunkt.

Eine Kraft, welche aus der Zusammensetzung mehrerer Kräfte P_n, P_r, P_s ... hervorgegangen ist, bezeichnen wir mit $P_{nrs\ldots}$. Wenn die Zeiger jener Kräfte in der Ordnung der natürlichen Zahlen auf einander folgen, wie z. B. bei denen P_5, P_6, P_7, P_8, so schreiben wir für ihre Resultante auch kürzer P_{5-8}.

---

1) Wo den Nummern der Figuren nichts weiter beigefügt ist, da stehen die betreffenden Figuren im Text. Bei den auf den Tafeln befindlichen Figuren, die, wie jene, für sich fortlaufend nummerirt sind, werden hinter den Figuren-Nummern die der Tafeln angegeben.

II. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, welche in der nämlichen geraden Linie wirken.

§ 4. **Zwei Kräfte von gleichem Sinne.** — Wenn zwei Kräfte P_1, P_2 in der nämlichen geraden Linie nach demselben Sinne hin wirken, so ist, gleichviel wo ihre Angriffspunkte liegen, ihre Resultante gleich ihrer Summe; sie liegt in derselben Geraden und ihr Angriffspunkt kann irgendwo in dieser genommen werden.

Man erhält diese Resultante graphisch, wenn man in der Geraden, in welcher beide Kräfte wirken, von einem beliebigen Punkte 0 (Fig. 1) aus die erste Kraft P_1 ihrer Grösse und ihrem Sinne nach als 0 1 abträgt und an ihren Endpunkt ebenso die zweite Kraft P_2 als 1 2 anfügt. Die Summe beider, oder die Strecke 0 2 vom Anfang 0 der ersten bis zum Endpunkt 2 der zweiten Kraft, ist die Resultante und repräsentirt dieselbe zugleich der Richtung und dem Sinne nach. Der Angriffspunkt kann in 0 oder in irgend einem andern Punkte der Geraden genommen werden.

Fig. 1.

0 1 2

§ 5. **Beliebig viele Kräfte von gleichem Sinne.** — Ganz ebenso können mehrere Kräfte P_1, P_2 . . P_5, die alle in derselben geraden Linie in dem nämlichen Sinne wirken, in eine Resultante vereinigt werden. Man trägt sie von einem beliebigen Punkte 0 (Fig. 2) der Geraden aus hinter einander in dieser auf, jede folgende mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden. Die Verbindungslinie 0 5 des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkt der letzten Kraft stellt die Resultante der Grösse, Richtung und dem Sinne ihrer Wirkung nach vor. Dabei ist offenbar die Ordnung, in welcher die Kräfte an einander gereiht werden, ganz gleichgültig.

Fig. 2.

0 1 2 3 4 5

§ 6. **Zwei gleichgrosse Kräfte von entgegengesetztem Sinne in der nämlichen geraden Linie. Gleichgewicht.** — Zwei Kräfte P_1, P_2, welche in der nämlichen geraden Linie, aber in entgegengesetztem Sinne wirken und von gleicher Grösse sind, halten sich, gleichviel wo ihre Angriffspunkte in jener Geraden liegen mögen, das Gleichgewicht. Es ist dies der einfachste Fall des Gleichgewichts, zugleich derjenige, von dessen Stattfinden wir unmittelbar überzeugt sind. Alle anderen müssen auf ihn zurückgeführt werden. — Trägt man die beiden in Rede stehenden Kräfte von einem beliebigen Punkte 0 (Fig. 3) der Geraden, in welcher sie wirken, hinter einander ihrer Grösse und ihrem Sinne nach in dieser Geraden auf, die zweite mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der ersten fügend, so fällt der Endpunkt 2 jener in den Anfangspunkt 0 von dieser, die graphische Summe beider Kräfte, d. h. die Verbindung des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der zweiten Kraft, ist Null. Dies ist also im graphischen Sinne das Kennzeichen für diesen einfachsten Fall des Gleichgewichts.

Fig. 3.

0 1
2

§ 7. Zwei ungleiche Kräfte von entgegengesetztem Sinn. — Wenn zwei Kräfte P_1, P_2 von ungleicher Grösse im entgegengesetzten Sinne in derselben Geraden wirken, so ist ihre Resultante gleich ihrer Differenz. Man erhält sie, wenn man wieder von irgend einem Punkte 0 (Fig. 4 und 5) der Geraden aus, in welcher beide Kräfte wirken, die eine, P_1, ihrer Grösse und ihrem Sinne nach auf dieser Geraden als 0 1 abträgt und an ihren Endpunkt die zweite Praft, P_2, ebenfalls ihrer Grösse und ihrem Sinne nach, anfügt. Die Verbindung 0 2 des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der zweiten Kraft stellt die Resultante ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach dar und zwar in *jedem* Fall, ob die in dem einen oder die im entgegengesetzten Sinne wirkende von den beiden Kräften die grössere ist.

Fig. 4.

Fig. 5.

§ 8. Beliebige Kräfte in der nämlichen geraden Linie. — In ganz gleicher Weise kann nun die Resultante beliebig vieler, in der nämlichen Geraden, aber in verschiedenem Sinne wirkenden Kräfte P_1, P_2 .. P_5 erhalten werden, wenn man sie von einem willkürlich angenommenen Punkte 0 (Fig. 6) dieser Geraden aus hinter einander ihrer Grösse und ihrem Sinne nach auf derselben abträgt, so dass jede folgende mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden gefügt ist. Die Verbindungslinie 0 5 des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der letzten Kraft stellt die Resultante ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach in *jedem* Falle vor. — Dabei ist die Ordnung, in welcher die Kräfte an einander gefügt werden, offenbar völlig willkürlich.

Fig. 6.

Wenn der Endpunkt der letzten Kraft in den Anfangspunkt 0 der ersten fällt, so ist die Summe aller der Kräfte, die in einem Sinne wirken, gleich der Summe aller der im entgegengesetzten Sinne thätigen; sämmtliche Kräfte halten sich folglich das Gleichgewicht, wie in dem einfachen Fall des § 6. — *Es ist also auch hier wieder das Zusammenfallen des Endes des Kräftezuges mit seinem Anfange das graphische Kennzeichen für das Gleichgewicht der behandelten Kräfte.*

III. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, die nach beliebigen Richtungen hin an einem und demselben Angriffspunkt wirken.

§ 9. Resultante beliebiger Kräfte an einem und demselben Angriffspunkt. — Wenn zwei Kräfte P_1, P_2 nach verschiedenen Richtungen hin an dem nämlichen Angriffspunkt 0 (Fig. 7) wirken, so findet man bekanntlich ihre Resultante der Grösse und Richtung nach als Diagonale 0 2 des über ihnen beschriebenen Parallelogrammes $0 P_1 2 P_2$. Diese Diagonale erhält man aber auch als Verbindungslinie des Anfangspunktes 0 der ersten Kraft mit dem Endpunkte 2 der zweiten Kraft, nachdem man von dem gemeinschaftlichen Angriffspunkt 0 aus beide Kräfte ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach so an einander gereiht hat, dass der Anfangspunkt der zweiten mit dem Endpunkt der ersten zusammenfällt und dadurch der Kräftezug 0 1 2 gebildet wird.

Fig. 7.

Hat man nun mit den beiden Kräften noch eine dritte zu vereinigen, so kann man diese mit der eben erhaltenen Resultante in der nämlichen Weise zusammensetzen, also mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt jener Resultante oder an den Endpunkt der zweiten Kraft fügen, d. h. von hier aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach abtragen; es ist dann wieder die Verbindungslinie des Angriffspunktes der ersten mit dem Endpunkte der dritten Kraft die Resultante der drei Kräfte der Grösse, Richtung und dem Sinne nach.

Fig. 8.

Der Schluss hieraus auf beliebig viele Kräfte P_1, $P_2 \ldots . P_7$, die alle in dem nämlichen Angriffspunkt 0 (Fig. 8) wirken, ist sehr leicht. Man findet deren Resultante, indem man sie von dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte 0 aus ihrer Grösse, ihrer Richtung und ihrem Sinne nach so an einander reiht, dass der Anfangspunkt jeder folgenden mit dem Endpunkt der vorhergehenden zusammenfällt. Die Verbindungslinie 0 7 des Anfangspunktes des so erhaltenen Kräftezuges 0 1 2 3 . . . 7 mit seinem Endpunkte, in dem hierdurch bezeichneten Sinne genommen, stellt die gesuchte Resultante der Grösse, Richtung und dem Sinne nach vor.

Nach einem bekannten geometrischen Satz folgt hieraus unmittelbar, dass die Projection der Resultante auf irgend eine Linie gleich der algebraischen Summe der Projectionen der Componenten auf dieselbe Linie ist.

§ 10. **Kräftepolygon in der Ebene und im Raume.** — Man nennt den Kräftezug 0 1 2 3 ... 7 (Fig. 8) das Polygon der Kräfte P_1, $P_2 \dots P_7$. Diese Benennung kann man auch für die Fälle des vorigen Abschnittes noch beibehalten, nur fallen eben dort alle Polygonecken in eine gerade Linie. — Wenn sämmtliche Kräfte, wie in Fig. 8 vorausgesetzt, in einer Ebene liegen, so wird das Polygon aus ihnen ein ebenes, das unmittelbar gezeichnet werden kann. Wirken aber die Kräfte, die in dem nämlichen Punkte angreifen, nach verschiedenen Richtungen des Raumes hin, so liegt das aus ihnen zu construirende Polygon nicht mehr in einer Ebene und muss daher durch seine Risse (Projectionen) auf zwei Tafeln bestimmt werden, wie ja dann auch schon die Kräfte durch ihre Risse auf zwei Tafeln gegeben sein müssen. Nach dem bekannten Satze, dass parallele und gleichlange Gerade parallele und gleichgrosse Risse haben, können die Risse des Kräftepolygons sehr leicht aus denen der Kräfte erhalten werden. Jeder derselben ist das auf bereits angegebene Weise zu zeichnende Polygon aus den Rissen der Kräfte auf der betreffenden Tafel, den Riss des gemeinschaftlichen Angriffspunktes als Anfangspunkt des Polygons genommen. Die Verbindungslinie dieses Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons in der betreffenden Tafel ist der Riss der Resultante der gegebenen Kräfte, weche durch die so erhaltenen beiden Risse ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach vollständig bestimmt ist.

Fig. 9.

In Fig. 9 ist diese Construction für vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, welche nicht in einer Ebene liegen, durchgeführt. Die Risse ihres gemeinschaftlichen Angriffspunktes sind $0'$ und $0''$, die Risse der Kräfte selbst $0'P_1'$, $0''P_1''$; $0'P_2'$, $0''P_2''$ ..., der eine Riss des Kräftepolygons im Raume ist $0'1'2'3'4'$, der andere $0''1''2''3''4''$. Die Linie des Raumes, deren Risse $0'4'$ und $0''4''$ sind, stellt der Grösse und Richtung nach, in dem Sinne von 0 bis 4 aufgefasst, die Resultante P_{1-4} vollständig dar.

§ **11.** Die Ordnung, in welcher man bei der oben gelehrten Construction des ebenen oder unebenen Kräftepolygons die gegebenen Kräfte mit einander verbindet, ist ganz gleichgültig. Dies ist leicht zu erweisen. Wenn man zunächst bloss zwei auf einander folgende Kräfte ins Auge fasst, so sieht man aus Fig. 7 deutlich, dass man an dieselbe Endstelle 2 kommt, ob man die Kraft P_2 an P_1 reiht (Zug 0 1 2) oder umgekehrt die Kraft P_1 an die P_2 (Zug $0 P_2 2$). Durch wiederholtes Verwechseln bloss zweier auf einander folgender Kräfte aber kann man, wie bekannt, aus einer bestimmten Anordnung jede andere erhalten.

§ **12.** Das aus beliebig gegebenen Kräften construirte Kräftepolygon gibt nicht bloss die Resultante sämmtlicher Kräfte. Es kann mittelst desselben sofort die Resultante einer Anzahl aus diesen ausgewählter Kräfte erhalten werden, wenn letztere nur unmittelbar auf einander folgen. Die Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten dieser Kräfte mit dem Endpunkte der letzten, also die Diagonale, welche die ausgewählten Kräfte unterspannt, ist, in jenem Sinne genommen, die gesuchte Resultante. So sind in dem Polygon 0 1 2 .... 7 der Fig. 8 die Diagonalen 0 2, 0 3, 0 4, 2 4, 2 5 u. s. w. beziehungsweise die Resultanten der Kräfte 1 und 2; 1, 2 und 3; 1, 2, 3 und 4; 3 und 4; 3, 4 und 5.

§ 13. Geschlossenes Kräftepolygon; Gleichgewicht von Kräften an einem und demselben Angriffspunkt. — Wenn das Polygon, das aus beliebig gegebenen, aber sämmtlich in demselben Angriffspunkt wirkenden Kräften $P_1, P_2 \ldots P_6$ (Fig. 10) construirt wird, sich schliesst, d. h. wenn der Endpunkt 6 des Kräftezuges mit dem Anfangspunkt 0 desselben zusammenfällt, so ist offenbar die Resultante 0 5 aus allen Kräften, mit Ausschluss der letzten, gleich und gerade entgegengesetzt dieser letzten, P_6; die gegebenen Kräfte sind also im Gleichgewicht. Das Kennzeichen für das Gleichgewicht von Kräften, die nach beliebigen Richtungen hin an einem und dem nämlichen Angriffspunkt wirken, ist also auch das (vgl. den vorigen Abschnitt), dass der aus ihnen construirte Kräftezug, in welchem jede folgende Kraft mit ihrem Anfangspunkt an das Ende der vorhergehenden gereiht wird, also das Kräftepolygon sich schliesst. Die Resultante sämmtlicher derartigen Kräfte, die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons, ist Null. Die Resultante 1 4 aber von einer Anzahl P_2, P_3, P_4 derselben, die unmittelbar auf einander folgen, ist gleich und gerade entgegengesetzt der Resultante 4 1 aus den übrigen P_5, P_6, P_1. Wird folglich aus Kräften $P_1, P_2 \ldots P_6$, welche sich an einem und demselben Punkte 0 das Gleichgewicht halten, eine Gruppe auf einander folgender P_2, P_3, P_4 ausgewählt und in entgegengesetzter Richtung genommen, so haben sie die nämliche Resultante 4 1 wie die übrig gebliebenen Kräfte. — Da übrigens die Ordnung, in welcher die Kräfte im Kräftepolygon an einander gereiht werden, willkürlich ist, so gelten die obigen Auseinandersetzungen, in welcher Weise auch die gegebenen im Gleichgewicht befindlichen Kräfte in zwei Gruppen geschieden werden mögen.

Fig. 10.

Ein ebenes Polygon muss geschlossen sein, wenn die Summen der Projectionen seiner Seiten auf zwei Richtungen in seiner Ebene gleich Null sein sollen, und ein Polygon im Raume ist geschlossen, wenn die Summen der Projectionen seiner Seiten auf drei Richtungen des Raumes, die nicht sämmtlich zu einer und derselben Ebene parallel laufen, Null sind. Da nun die Projectionen der Seiten von Kräftepolygonen gleich den Projectionen der Kräfte selber auf irgend eine Richtung sind, so folgen hieraus die Sätze:

Kräfte, welche an einem und demselben Angriffspunkt nach beliebigen Richtungen einer durch denselben hindurchgehenden Ebene wirken, sind im Gleichgewicht, wenn die Summen der Projectionen dieser Kräfte auf zwei Richtungen jener Ebene Null sind.

Kräfte, welche an einem und demselben Angriffspunkt nach beliebigen Richtungen des Raumes wirken, sind im Gleichgewicht, wenn die Summen ihrer Projectionen auf drei Richtungen des Raumes, die nicht sämmtlich parallel zu einer Ebene laufen, Null sind.

§ 14. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die an demselben Angriffspunkt mit ihr wirken. — Wenn umgekehrt eine Kraft P (Fig. 11) in zwei oder mehreren Componenten zerlegt werden soll, die denselben Angriffspunkt wie sie haben, so müssen diese, so an einander gereiht, dass der Anfangspunkt jeder folgenden mit dem Ende der vorhergehenden zusammenfällt, einen Kräftezug 0 1 2 oder 0 1′ 2′ 3′ 4′ bilden, dessen Anfangspunkt auf den Anfangspunkt 0 der Kraft P und dessen Ende auf den Endpunkt P derselben Kraft zu liegen kommt. Im Uebrigen ist dieser Kräftezug, auch wenn er nur aus zwei Kräften 1 und 2 besteht, völlig

Fig. 11.

willkürlich. Speciell in diesem letzteren Fall können folglich entweder die Richtungen beider Componenten oder die Grössen derselben, oder Grösse und Richtung der einen von ihnen beliebig angenommen werden; stets bilden beide Componenten die Seiten eines Parallelogrammes, von dem die gegebene Kraft die Diagonale ist (§ 9).

Ist die gegebene Resultante in drei Componenten zu zerlegen, die denselben Angriffspunkt haben wie sie, aber nicht mit ihr in einer Ebene liegen, so wird das Kräftepolygon aus ihnen und der Resultante ein unebenes Viereck 0 1 2 3 (Fig. 12^a), von dem zunächst nur die Seite 0 3 gegeben ist. Sind von den drei anderen Seiten die Richtungen vorgeschrieben, also die der Componenten, welche sie an Grösse, Richtung und Sinn zu repräsentiren haben, so wird das Kräftepolygon vollständig bestimmt. Denn werden durch die Punkte 0 und 3 Parallele zu zweien dieser Richtungen gezogen, so gibt es nur eine ganz bestimmte Gerade 1 2, die sie beide schneidet und parallel zur dritten gegebenen Richtung ist. Die drei Componenten, vom gemeinschaftlichen Angriffspunkt A (Fig. 12^b) aufgetragen, bilden die drei Seiten eines Parallelepipeds, dessen Diagonale die gegebene Resultante ist, und das folglich ein Analogon zum Kräfteparallelogramme in der Ebene darstellt.

Fig. 12

Von den drei Componenten, in welche eine gegebene Kraft P_{1-3} (Fig. 13^b) im Raume zerlegt werden soll, können natürlich auch noch andere Bestimmungsstücke vorgeschrieben werden. Ein bestimmter Fall ist hier noch, der Anwendung halber, die später von ihm gemacht werden wird, von Wichtigkeit, der nämlich, wo von einer der drei Componenten (P_1) Grösse, Richtung und Sinn, von der zweiten ein Punkt N, durch den sie gehen muss, also ihre Richtung AN, und für die dritte eine gerade Linie MM gegeben ist, die sie schneiden soll. Trägt man von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkt 0 (Fig. 13^a) die Kräfte P_{1-3} und P_1 als 0 3 und 0 1 ab, so stellt die Verbindungslinie 1 3 die Resultante der beiden Componenten P_2 und P_3 der Grösse, Richtung und dem Sinne nach dar. Diese beiden Componenten müssen folglich in einer durch AN (Fig 13^b) gehenden, zu 1 3 parallelen und damit völlig bestimmten Ebene liegen, und da P_3 die Gerade MM schneiden soll, so muss sie durch den Schnittpunkt N′ jener Ebene mit dieser Geraden gehen. Ihre Richtung ist somit nun auch bestimmt. Zieht man daher durch die Punkte 1 und 3 (Fig. 13^a) Parallele bezw. zu AN und AN′, so geben diese in ihrem Schnittpunkt 2 den fehlenden Eckpunkt des Kräftepolygons 0 1 2 3 und damit Sinn und Grösse der Componenten P_2 und P_3.

Fig. 13

Bei Ausführung obiger beiden Zerlegungsarten müssen natürlich die Hülfsmittel der darstellenden Geometrie in Anspruch genommen werden.

IV. Abschnitt.

Zusammensetzung von Kräften, welche in der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken.

§ 15. Resultante zweier Kräfte in einer Ebene. — Nehmen wir wieder zunächst zwei Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 14[b]), welche in der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten A_1 und A_2 wirken. Wenn beide Kräfte, gehörig verlängert, sich schneiden, so darf man sie nur mit ihren Angriffspunkten in den Schnittpunkt a verlegen und das Parallelogramm über ihnen construiren, um in der Diagonale desselben die Resultante ihrer Grösse, Richtung und Lage nach zu erhalten. Oder man kann auch von einem beliebigen Anfangspunkte 0 aus (Fig. 14[a]) die beiden gegebenen Kräfte als 0 1 und 1 2 ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach hinter einander auftragen, so gibt die Linie 0 2 die Resultante derselben ihrer Grösse, ihrer Richtung und ihrem Sinne nach. Ihre Lage in der Ebene ist somit bekannt, wenn man einen Punkt weiss, durch den sie hindurchgehen muss. Ein solcher ist der Schnittpunkt a der beiden Kräfte, vorausgesetzt natürlich, dass ein solcher vorhanden ist.

Fig. 14

§ 16. Für parallele Kräfte sind die beiden eben besprochenen Verfahren zur Aufsuchung der Resultante nicht mehr anwendbar. Es ist aber offenbar wünschenswerth, ein Verfahren zu kennen, das in gleicher Weise bei parallelen und bei sich schneidenden Kräften gebraucht werden kann. Zu diesem Behufe darf nur ein anderer als der Schnittpunkt der beiden Kräfte aufgesucht werden, durch den die Resultante hindurchgehen muss, und einen solchen findet man auf folgendem Wege:

Man denke sich P_1 (Fig. 14[b]) in zwei Componenten zerlegt, welche sich, nach beliebigen Richtungen 0 I und I II hin wirkend, im Punkte I auf der Richtung der Kraft P_1 schneiden, und ebenso P_2 in zwei Componenten, von denen die eine, in der Linie I II wirkend, der in derselben Linie thätigen Componente von P_1 gleich und entgegengesetzt ist; dadurch ist die zweite Componente von P_2 ihrer Grösse und Richtung, aber auch ihrer Lage II III nach bestimmt, da sie durch den Punkt II auf der Kraft P_2 hindurchgehen muss. Von den vier Componenten, in welche dadurch die beiden Kräfte P_1 und P_2 zerlegt worden sind, halten sich die beiden, in der Linie I II thätigen das Gleichgewicht. Die Resultante aus den beiden andern ist daher genau gleich der Resultante der

Kräfte P_1 und P_2, und es ist folglich auch der Schnittpunkt α der Linien 0 I und II III ein Punkt, durch den diese Resultante gehen muss.

Jene Zerlegung der Kräfte P_1 und P_2 ist aber mit Hülfe der Figur 14ª leicht vorzunehmen. Nimmt man einen beliebigen Punkt C an und zieht von ihm aus die Strahlen C0 und C1 nach dem Anfangs- und Endpunkte der Kraft 01, so stellen 0C und C1, in diesem Sinne genommen, zwei Componenten vor, in welche jene Kraft zerlegt ist; und zieht man noch den Strahl C2, so sind 1C und C2 die beiden Componenten der zweiten Kraft, von denen die erstere gleich und entgegengesetzt der Componente C1 der Kraft 01 ist. Wenn man folglich (Fig. 14ᵇ) durch einen beliebigen Punkt I der Kraft P_1 die Linie 0I parallel zum Strahl 0C, dann die Linie I II parallel zum Strahl 1C zieht, bis sie die Kraft P_2 in II schneidet, und endlich die Linie II III parallel zum Strahl 2C, so gibt der Durchschnitt der Linie 0I und II III einen Punkt α, durch den die Resultante der Kräfte P_1 und P_2 hindurchgehen muss. Da diese der Grösse, Richtung und dem Sinne nach bereits durch die Linie 02 gegeben ist, so ist sie vollständig bekannt.

Fig. 15

Fig. 16

§ **17.** Das hier gefundene Verfahren ist aber nun, wie leicht zu sehen, ebenso gut auf parallele, als auf Kräfte, welche sich wie die P_1 und P_2 der Fig. 14ᵇ schneiden, anzuwenden. In den Figuren 15ª und 15ᵇ, sowie 16ª und 16ᵇ wurde in der That auf diese Weise die Resultante je eines Paares paralleler Kräfte P_1 und P_2 aufgefunden und zwar für die beiden Fälle, wo diese Kräfte in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne wirken. Der Kräftezug 0 1 2, welchen man erhält, wenn man in den Figuren 15ª und 16ª die beiden Kräfte von einem beliebigen Punkte 0 aus aufträgt, fällt hier in e i n e gerade Linie. Nimmt man ausserhalb derselben einen beliebigen Punkt C, zieht von diesem aus die Strahlen C0, C1, C2 und alsdann in den Figuren 15ᵇ und 16ᵇ durch einen beliebigen Punkt der Kraft P_1 die Linien 0I parallel zu 0C und I II parallel zu 1C, letztere bis sie die Kraft P_2 in II trifft, und endlich durch diesen Schnittpunkt II III parallel zu 2C, so gibt der Durchschnitt der Linien 0I und II III einen Punkt α, durch den die gesuchte Resultante hindurchgehen muss. Grösse, Richtung und Sinn derselben sind durch die Strecke 02 der Figuren 15ª und 16ª ebenso bestimmt wie bei Kräften, die in der nämlichen geraden Linie wirken.

§ **18. Fall des Gegenpaars (Drehzwillings).** — Es ist klar, dass auf dem eben gezeigten Wege allemal ein Schnittpunkt α (Fig. 14ᵇ, 15ᵇ und 16ᵇ), durch den die Resultante hindurchgehen muss, gefunden wird, wenn nur die Strahlen C0 und C2 in den Figuren 14ª, 15ª und 16ª nicht in dieselbe gerade Linie zusammenfallen. Das kann durch zweckmässige Wahl des sonst ganz beliebigen Punktes C leicht vermieden werden, vorausgesetzt, dass die Punkte 2 und 0 nicht selbst auf einander zu liegen kommen. Das letztere aber tritt wirklich ein bei einem Paar paralleler, gleicher, im entgegengesetzten Sinne gerichteter Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 17). Wo man auch in diesem Falle den Punkt C annehmen mag, nachdem in Fig. 17ª die beiden Kräfte von einem beliebigen Punkte 0 aus in dem Zuge 0 1 2 an einander gereiht worden sind, die Linien 0 I und II III

in Fig. 17[b], bezw. parallel zu 0 C und 2 C, werden immer parallel zu einander werden; und da die Resultante stets durch ihren Durchschnittspunkt hindurchgehen muss, so liegt sie selbst in der unendlich fernen Geraden der Ebene, in der die Kräfte wirken. Ihre Grösse 0 2 ist nach Fig. 17[a] Null oder unendlich klein. Zwei Kräfte also, die parallel zu einander, von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Sinne sind, lassen sich nicht mehr in eine einzige, endliche, in endlicher Entfernung gelegene Kraft vereinigen. Ihre Resultante ist einer unendlich kleinen Kraft in unendlicher Entfernung, in der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene, gleich zu achten.

Im Grunde genommen wurde durch die Construction in Fig. 17 an die Stelle des Kräftepaares P_1, P_2 nur ein anderes Paar von Kräften gesetzt, die, wie die ursprünglich gegebenen, gleichgross, parallel, aber von entgegengesetztem Sinne sind. Es sind dies die in 0 I und II III (Fig. 17[b]) liegenden Componenten der Kräfte P_1 und P_2, die bezw. gleich 0 C und C 2 (Fig. 17[a]) sind. Grösse, Richtung, Sinn und Lage dieser Componenten hängt von der Lage des Punktes C und der Geraden 0 I ab. Da diese in der Ebene unserer Kräfte völlig willkürlich angenommen werden können, so folgt daraus, dass ein Paar gleichgrosser und paralleler, entgegengesetzt gerichteter Kräfte in unendlich vielfacher Weise durch ein anderes Paar solcher Kräfte ersetzt werden kann. Ist durch willkürliche Annahme von Grösse, Richtung und Sinn der einen Kraft dieses letzteren Paares der Punkt C bestimmt, so kann die Linie 0 I auch noch durch einen beliebigen Punkt der Ebene gezogen und somit auch die Lage jener Kraft vorgeschrieben werden; die andere, zugehörige, ist dann allerdings völlig bestimmt.

Fig. 17

Hiernach ist es nun leicht, zu beweisen, das weder durch obiges noch durch irgend ein anderes Verfahren jemals eine Resultante zweier paralleler und entgegengesetzt gerichteter gleichgrosser Kräfte, d. h. *eine* Kraft gefunden werden kann, die dieses Paar von Kräften in seiner Wirkung ersetzt. Denn wäre dies möglich, so könnte durch Festmachung irgend eines Punktes in der geraden Linie, in welcher die Resultante liegt, die Wirkung dieser vollständig aufgehoben werden; wenn aber das gegebene Kräftepaar durch ein anderes von gleicher Wirkung ersetzt wird, von dem eine Kraft durch jenen Fixpunkt geht, so geht die andere gewiss nicht ebenfalls durch denselben hindurch und übt deshalb immer eine Drehwirkung um ihn aus.

Solche Kräftepaare, wie wir sie oben betrachtet haben, bilden also, wie eine einzelne Kraft auch, sozusagen ein Element in der Mechanik, das durch nichts Einfacheres ersetzt werden kann. Es ist daher gerechtfertigt, ihnen einen besonderen, einfachen Namen beizulegen: man nennt sie *Gegenpaare* oder *Drehzwillinge*. Durch letztere Bezeichnung soll das Bestreben eines Paares solcher Kräfte ausgedrückt werden, die Ebene, in der sie liegen, um irgend einen ihrer Punkte zu drehen. Die Richtung dieser Drehung ist für jedes Gegenpaar eine bestimmte, für alle seine äquivalenten Paare gleiche und wird jederzeit leicht erkannt, wenn man sich in der einen der beiden Kräfte, gleichviel in welcher, einen beliebigen Punkt festgehalten denkt, um den dann nur die andere Kraft eine Drehwirkung eben in der zu suchenden Richtung ausübt.

Wie nun eine einzelne Kraft in der geraden Linie, in der sie wirkt, beliebig verlegt werden darf, so kann auch, wie oben gezeigt wurde, ein Gegenpaar durch ein anderes in derselben Ebene gelegenes ersetzt werden; und wie dort Grösse und Sinn der Kraft ungeändert bleiben muss, so müssen auch die, einem ursprünglich gegebenen und daher auch unter sich äquivalenten Gegenpaare

einer Ebene nicht bloss gleiche Drehrichtung haben, sondern ausserdem noch in einem Zusammenhange unter einander stehen, der leicht aufzudecken ist:

Trägt man auf die Schenkel des Winkels 0 I a (Fig. 17[b]), der dem Winkel 1 0 C (Fig. 17[a]) gleich ist, die Stücke I 0 und I a bezw. gleich C 0 und 0 1 auf, so wird das Dreieck 0 I a dem Dreiecke 0 1 C congruent und daher 0 a parallel mit 1 C und folglich auch mit I II. Die Dreiecke I II a und I II 0 sind daher an Flächeninhalt einander gleich. Das erste hat als Seite I a die eine der Kräfte des ursprünglichen Gegenpaares, und die gegenüberliegende Spitze II liegt in der geraden Linie, in der die andere Kraft wirkt; sein Flächeninhalt ist dadurch vollkommen bestimmt; ebenso derjenige des zweiten, dessen eine Seite 0 I die eine der Kräfte des neuen Gegenpaares ist, und dessen Spitze II in der anderen Kraft desselben liegt. Hieraus folgt der Satz:

Ein Gegenpaar kann in seiner Ebene in beliebiger Weise verschoben und der Grösse und Richtung seiner Kräfte nach verändert werden, wenn nur seine Drehrichtung und der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die eine dieser Kräfte ist, und dessen gegenüberliegende Spitze in der anderen liegt, dieselben bleiben.

Wir werden jenes Dreieck, in welches wir die Drehrichtung des Gegenpaares durch einen Kreispfeil so eintragen, wie es in Fig. 17[b] bezüglich des Dreiecks 0 I II geschehen ist, das charakteristische Dreieck des Gegenpaares nennen.

§ 19. Kräfte- und Seilpolygon zweier Kräfte in einer Ebene. — Denken wir uns in den Figuren 14 bis 17 die Kräfte P_1, P_2 wieder durch ihre Componenten 0 C und C 1, sowie 1 C und C 2 ersetzt, die in den Linien 0 I, I II und II III wirken, so heben sich die beiden in I II thätigen, nämlich C 1 und 1 C, gegenseitig auf, indem sie jene Linie, als Theil der materiellen Ebene, in der die Kräfte wirken, betrachtet, auf Zug (wie in Fig. 14, 15 und 17) oder auf Druck (wie in Fig. 16) angreifen. Um auch den beiden andern, in 0 I und II III thätigen Componenten 0 C und C 2 und folglich den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht zu halten, darf man nur jeder von jenen in der Linie, in welcher sie wirkt, eine gleichgrosse Kraft C 0 und 2 C entgegensetzen, wodurch diese Linien ebenfalls auf Druck oder Zug in Anspruch genommen werden. Nun ist klar, dass das auf solche Weise erzielte Gleichgewicht schon bestehen kann, wenn die materielle Ebene, in der die Kräfte liegen, durch ein System 0 I II III materieller Linien ersetzt wird, welches, in den Eckpunkten I und II wie in Scharnieren beweglich, im Stande ist, in seinen einzelnen Theilen den Zug oder Druck auszuhalten, der in der Längsrichtung derselben, wie oben entwickelt, ausgeübt wird.

Ob Zug oder Druck in einem solchen Linienstück 0 I, I II oder II III stattfindet, ist sehr leicht zu entscheiden. Man darf nur die an einem seiner Enden wirkende, gegebene Kraft P_1 oder P_2 in zwei Componenten zerlegen, deren Richtungen durch die in jenem Punkte zusammenstossenden Linienstücke verzeichnet sind. Wirkt die in die fragliche Linie fallende Componente von deren Endpunkt aus nach auswärts, so wird dieses Linienstück gezogen; ist sie aber einwärts gerichtet, so wird es gedrückt. So werden in den Figuren 14, 15 und 17 sämmtliche Linienstücke 0 I, I II, II III gezogen, in Fig. 16 gedrückt.

In dem Falle, wo ein Linienstück gezogen wird, darf es auch biegsam sein, nach Art eines Seils oder einer Kette, ohne dass das Gleichgewicht beeinträchtigt wird. Findet dies bei allen Linienstücken statt, so kann das ganze Polygon 0 I II III aus einem Seil oder einer Kette bestehen, in deren Eck- oder Knotenpunkten die Kräfte P_1, P_2 wirken. Im anderen Falle muss die Linie, die auf Druck angegriffen wird, steif sein. Wie dem aber auch sein mag, man nennt gewöhnlich den Linienzug 0 I II III das Seilpolygon aus den Kräften P_1 und P_2. Der Linienzug 0 1 2 ist das uns schon bekannte Kräftepolygon aus denselben; den willkürlich angenommenen Punkt C nennt man den Pol des Kräftepolygons, oder auch wohl des Seilpolygons 0 I II III, da dieses wesentlich durch ihn bestimmt wird.

Um also zwei sich schneidende oder parallele Kräfte in eine Resultante zu vereinigen, construirt man das Kräfte- und Seilpolygon aus ihnen. Zuerst das Kräftepolygon 0 1 2 (Fig. 14 bis 17), indem man sie von einem beliebigen Punkte 0 aus hinter einander ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach aufträgt. Alsdann nimmt man einen willkürlichen Punkt C als Pol und zieht zu den, von ihm aus in die Ecken des Kräftepolygons geführten Strahlen 0 C, 1 C, 2 C bezw. die Linien 0 I, I II, II III parallel, wobei die Lage der ersten beliebig ist, die zweite durch den Durchschnittspunkt I jener ersten mit der Kraft P_1 geht und die dritte durch den Durchschnittspunkt II der zweiten mit der zweiten Kraft P_2. Der Durchschnittspunkt α derjenigen Seite 0 I des Seilpolygons, welche der ersten Kraft vorangeht, mit der Seite II III, welche der zweiten Kraft folgt, ist ein Punkt der gesuchten Resultante, deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale 0 2 im Kräftepolygon bestimmt ist, welche die beiden Kräfte unterspannt.

§ **20.** Das Kräfte- und Seilpolygon zweier beliebiger Kräfte in einer Ebene, oder die Figuren 14^a und 14^b (S. 9) stehen in einfachen Beziehungen zu einander. Die Resultante der beiden Kräfte, welche durch den Schnittpunkt α der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und II III hindurchgeht und parallel zu 0 2 ist, muss zugleich durch den Schnittpunkt a der Kräfte selber gehen, oder die Verbindungslinie aα muss von selber parallel zu 0 2 werden. Letztere zwei Linien sind aber die sechsten Seiten zweier vollständiger Vierecke 0 1 2 C und a I α II, von denen die fünf anderen Seiten durch die Construction parallel gemacht worden sind, nämlich 0 1 zu a I, 1 2 zu a II, I α zu 0 C, I II zu 1 C und α II zu 2 C. Daraus folgt der rein geometrische Satz:

Wenn in zwei vollständigen Vierecken fünf Seiten beziehentlich parallel gemacht werden, so werden die sechsten von selber parallel.

Man nennt zwei solche, zu einander parallele Seiten zweier vollständiger Vierecke entsprechende Seiten; um sie recht deutlich hervorzuheben, haben wir sie in den Figuren a) und b) mit gleichen Ziffern bezeichnet, mit feinen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in Fig. a) und mit fetten **1, 2, 3, 4, 5, 6** in Fig. b), wobei wir natürlich den Linien, welche die Kräfte P_1 und P_2 vorstellen oder enthalten, die Ziffern 1 und 2 beilegten. Auf diese Weise erkennt man dann leicht eine weitere Eigenschaft unserer beiden Vierecke: Dreien Seiten, welche in dem einen ein Dreieck bilden, entsprechen in dem anderen drei Seiten, die sich in einem und demselben Punkte schneiden, und umgekehrt, dreien Seiten, die in dem einen Viereck durch einen und denselben Punkt gehen, entsprechen im anderen drei Seiten eines Dreiecks. Deshalb nennt man zwei solche Vierecke, wie die vorliegenden, reciproke Vierecke.

Das Vorstehende lässt sich, mit den nöthigen Modificationen, leicht auf die Figuren 15^a und 15^b, 16^a und 16^b, sowie 17^a und 17^b ausdehnen.

§ **21.** Das Seilpolygon 0 I II III (Fig. 14 bis 17) ist bestimmt durch die Wahl des Poles C im Kräftepolygon und durch die Lage der ersten Seite 0 I, die ja auch beliebig angenommen werden kann. Verschiedenen Lagen dieser letzteren Seite entsprechen Seilpolygone, welche zu ähnlichen vollständigen Vierecken αI a II, α'I' a II' etc. (Fig. 18) gehören, und in denen die Schnittpunkte α, α'.... der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und I II, 0'I' und I' II' etc. in einer und derselben geraden Linie liegen. Einem und demselben Kräftepolygon mit bestimmtem Pol C entsprechen also unendlich viele reciproke Vierecke, die alle einander ähnlich sind, und von denen wir stets nur eines zeichnen; aus denselben können daher immer nur Richtungen und Lagen, niemals Längen bestimmt werden.

Welche Lage auch der Pol C des Kräftepolygons (Fig. 14) haben mag, stets müssen sich die äussersten Seilpolygonseiten 0 I und II III auf der geraden Linie schneiden, welche die Resultante der Kräfte P_1 und P_2 enthält, also durch deren Schnittpunkt a geht und parallel zu 0 2 ist. Hieraus folgt der Satz:

Während der Pol eines Kräftepolygons aus zwei Kräften in einer Ebene alle möglichen Wege in dieser Ebene durchläuft, bewegt sich der Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten auf einer geraden Linie, die durch den Schnittpunkt der Kräfte hindurchgeht und die Resultante derselben enthält.

Die Ausdehnung dieses Satzes auf den Fall paralleler Kräfte ist leicht.

Fig. 18

Fig. 19

Heben wir nun irgend zwei Lagen des Poles im Kräftepolygon, C und C′ (Fig. 19[a]), und die dazu gehörigen Seilpolygone O I II III und O′ I′ II′ III′ (Fig. 19[b]) heraus, so müssen nach obigem Satze die Durchschnittspunkte α und α' der äussersten Seilpolygonseiten in einer durch den Durchschnittspunkt a der Kräfte gehenden, zu 0 2 parallelen geraden Linie liegen. Die Verbindungslinie C C′ der Pole bildet ferner die sechste Seite in drei vollständigen Vierecken C C′ 0 1, C C′ 1 2, C C′ 0 2, denen in Fig. 19[b] 3 andere, I I′ $s_1 s_2$, II II′ $s_2 s_3$, $\alpha\alpha'$ $s_1 s_3$, entsprechen, in denen durch die Construction je 5 Seiten beziehentlich den 5 ersten Seiten jener Vierecke parallel gemacht worden sind. Die sechsten Seiten müssen folglich ebenfalls parallel werden, also $s_1 s_2$, $s_2 s_3$ und $s_1 s_3$ zu C C′. Die Durchschnittspunkte s_1, s_2, s_3 der gleichvielten Seiten der beiden Seilpolygone O I II III und O′ I′ II′ III′ müssen also in einer und derselben, zur Verbindungslinie der Pole C und C′ parallelen geraden Linie liegen; oder:

Wenn sich der Pol des Kräftepolygons aus zwei Kräften in einer Ebene in einer geraden Linie fortbewegt, so drehen sich die Seiten der Seilpolygone um Punkte einer und derselben, zur Bahn des Poles parallelen Geraden.

Hieraus sieht man leicht, wie die Seilpolygone für alle in einer geraden Linie CC′ liegenden Pole gefunden werden können, wenn das für einen dieser Pole C, nämlich 0 I II III, gezeichnet ist: Nachdem die Linie $\gamma \gamma'$ parallel zu CC′, sonst aber beliebig gezogen worden ist und dadurch die Durchschnittspunkte s_1, s_2, s_3 der Seiten des bekannten Seilpolygons mit ihr erhalten worden sind, legt man durch s_1 eine Parallele 0 I′ zur Verbindungslinie des neuen Poles C′ mit dem Anfangspunkt 0 des Kräftepolygons und verbindet dann I′ mit s_2 und II′ mit s_3. Diese letzteren Linien werden dann von selbst parallel zu 1 C′ und 2 C′.

§ 22. **Kräfte- und Seilpolygon beliebig vieler Kräfte in einer Ebene.** — Das Verfahren, welches wir im Vorstehenden für die Zusammensetzung zweier sich schneidender oder paralleler Kräfte kennen gelernt haben, lässt sich sehr leicht auf den Fall ausdehnen, wo beliebig viele, in einer Ebene gelegene, sich schneidende oder parallele Kräfte zu vereinigen sind.

Kommt z. B. in Fig. 14 (S. 9) zu den beiden dort vereinigten Kräften 1 und 2 noch eine dritte hinzu, so kann man dieselbe mit der Resultante 0 2 aus jenen ganz ebenso zusammenfassen wie vorhin die zweite Kraft mit der ersten. Man wird also an den Endpunkt 2 diese dritte Kraft ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach anfügen, den Strahl 3C durch den Pol C und den Endpunkt der dritten Kraft ziehen und parallel mit diesem durch den Durchschnittspunkt III der vorhergehenden Seilpolygonseite II III mit der dritten Kraft die nächste Seilpolygonseite III IV. Der Durchschnitt derselben mit der ersten Seilpolygonseite 0 I gibt einen Punkt, durch den die Resultante P_{1-3} hindurchgehen muss, deren Grösse, Richtung und Sinn im Kräftepolygon durch die Diagonale dargestellt ist, welche die Kräfte 1 bis 3 unterspannt.

Um also z. B. die gegebenen neun Kräfte P_1, P_2 ...... P_9 (Fig. 1 Taf. I) zu vereinigen, wird man ein Kräftepolygon 0 1 2 3 ..... 9 zeichnen, indem man sie von einem beliebigen Punkte 0 aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach hinter einander aufträgt. Man wird dann einen beliebigen Punkt C in der Ebene jenes Polygons als Pol nehmen und durch ihn und die Eckpunkte 0, 1, 2... des letzteren die Strahlen C 0, C 1, C 2 etc. legen. Parallel zu diesen Strahlen laufen dann die Seiten des Seilpolygons. Die erste Seite desselben 0 I, parallel zum Strahl 0 C, hat eine beliebige Lage. Durch ihren Schnittpunkt I mit der Kraft P_1 zieht man die Seilpolygonseite I II parallel zum Strahl 1 C bis an die Linie, in welcher die Kraft P_2 wirkt; durch den Punkt II wird alsdann die Seite II III parallel dem Strahl 2 C gezogen u. s. w. f. Bei dem Zusammenhang, in welchem die Bezeichnung der Ecken des Seil- mit derjenigen der Ecken des Kräftepolygons steht, kann das erstere aus letzterem ganz mechanisch construirt werden. Die Seiten

0 I, I II, II III...... IX X

des Seilpolygons sind bezw. parallel zu den Strahlen

0 C, 1 C, 2 C......... 9 C

im Kräftepolygon.

Die Resultante sämmtlicher neun Kräfte ist ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach durch die Diagonale 0 9 des Kräftepolygons bestimmt, welche sämmtliche neun Kräfte unterspannt, d. h. den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkt der letzten verbindet. Deshalb ist auch hier wieder (vgl. § 9) die Projection der Resultante auf irgend eine Linie gleich der algebraischen Summe der Projectionen der Componenten auf dieselbe Linie. Die Lage der Resultante ergibt das Seilpolygon; sie muss nämlich durch den Punkt X hindurchgehen, in welchem sich die äussersten Seilpolygonseiten, die der Kraft P_1 vorangehende 0 I und die der Kraft P_9 nachfolgende IX X, schneiden.

§ **23.** Aber nicht bloss die Resultante sämmtlicher gegebenen Kräfte, die in der nämlichen Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken, kann man mittelst des im vorigen § gezeigten Verfahrens durch Construction des Kräfte- und Seilpolygons finden, sondern auch mit derselben Leichtigkeit diejenige einer beliebig ausgewählten Anzahl jener Kräfte, wenn sie nur unmittelbar auf einander folgen. Grösse, Richtung und Sinn dieser Resultante ist immer durch die Diagonale bestimmt, welche im Kräftepolygon die betr. Kräfte unterspannt, und ihre Lage ist allemal dadurch bekannt, dass sie durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten, derjenigen, welche der ersten von den zu vereinigenden Kräften vorangeht, mit derjenigen, welche der letzten derselben nachfolgt, hindurchgehen muss.

Die Resultante der Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_6$ (Fig. 1 Taf. I) also ist nach Grösse, Richtung und Sinn gleich der Diagonale 0 6 des Kräftepolygons und geht durch den Schnittpunkt a der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und VI VII hindurch; und die Resultante der Kräfte $P_3 \ldots . P_8$ ist gleich der Diagonale 2 8 und geht durch den Schnittpunkt b der äussersten Seilpolygonseiten II III und VIII IX.

§ **24.** Denkt man sich jede der Kräfte P_1, $P_2 \ldots$ (Fig. 1 Taf. I) in dem Eckpunkte des Seilpolygons, der auf ihr liegt, nach den Richtungen der dort zusammen stossenden Seiten dieses Polygons in zwei Componenten zerlegt, so erhält man Grösse, Richtung und Sinn dieser Componenten unmittelbar aus dem Kräftepolygon. Die Componenten der Kraft 1 sind 0 C und C 1, die der Kraft 2 sind 1 C und C 2, die der Kraft 3 sind 2 C und C 3 u. s. w. f. In jede Seilpolygonseite, mit Ausnahme der ersten und letzten, kommen also zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Componenten zu liegen, die sich das Gleichgewicht halten und als Zug- oder Druckspannungen der betr. Seite betrachtet werden können. Die in die erste und letzte Seite fallenden beiden Componenten können also alle gegebenen Kräfte ersetzen, und dies ist wieder ein Beweis dafür, dass die Resultante der letzteren durch den Durchschnittspunkt jener äussersten Seilpolygonseiten hindurchgehen muss.

Indem man den, in die erste und letzte Seite fallenden Componenten gleiche Kräfte entgegensetzt, kann man das ganze Kräftesystem im Gleichgewicht halten. Zu diesem Gleichgewicht ist dann nur ein solcher Zusammenhang erforderlich, wie der durch feste, mit den Seilpolygonseiten zusammenfallende und in dessen Eckpunkten wie um Scharniere bewegliche Linien erreicht wird; und wenn eine solche Linie Zugspannungen erleidet, so kann sie sogar noch vollkommen biegsam wie ein Stück Seil oder Kette sein, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Es ist aber leicht zu entscheiden, ob eine Seite des Seilpolygons gedrückt oder gezogen wird. Man darf nur die an einem ihrer Endpunkte wirkende Kraft P nach den Richtungen der in diesem Punkte zusammenstossenden Seiten in zwei Componenten zerlegen. Wirkt die in die betrachtete Seite treffende Componente von dem Endpunkte aus, an den man zerlegt hat, nach auswärts, so findet Zug, wirkt sie aber nach einwärts, so findet Druck in jener Seite statt. Die Grösse dieser Zug- oder Druckspannung ist gleich der Länge des Strahls im Kräftepolygon, zu dem die betrachtete Seilpolygonseite parallel ist.

In gleicher Weise können irgend zwei Strahlen 3 C und C 8 im Kräftepolygon, in passendem Sinne genommen, als Componenten der Kraft 3 8 betrachtet werden, welche ihre Endpunkte 3 und 8 verbindet. Diese Verbindungslinie stellt aber der Grösse, Richtung und dem Sinne nach auch die Resultante der Kräfte 4, 5 . . 8 vor, welche vom Endpunkte des ersteren Strahles aus bis zum Endpunkte des zweiten an einander gereiht worden sind. Daher kann die Resultante einer Anzahl auf einander folgender Kräfte auch als Mittelkraft der Spannungen in den beiden äussersten, diesen Kräften zugehörigen Seilpolygonseiten betrachtet werden.

§ **25.** Unter den Kräften, welche in Fig. 1 Taf. I vermittelst des Kräfte- und Seilpolygons in eine Resultante vereinigt wurden, befinden sich solche, welche sich schneiden, dann parallele, und zwar sowohl gleich- als entgegengesetzt gerichtet, und endlich auch ein Gegenpaar $P_6 P_7$. Dies alles hat nicht den geringsten Einfluss auf die Construction. Es kommt bloss darauf an, dass jede Seilpolygonseite die auf sie folgende Kraft P schneidet. Da aber jede solche Seite parallel mit dem

Strahl im Kräftepolygon ist, der vom Pol nach dem Anfangspunkte der auf sie folgenden Kraft geht, so ist jene Bedingung allgemein erfüllt, wenn nur der Pol des Kräftepolygons in keine der verlängert gedachten Seiten desselben fällt. Es steht nichts im Wege, dem Pol stets eine solche Lage zu geben.

§ **26.** Von besonderem Interesse ist es, den Einfluss kennen zu lernen, welchen das Gegenpaar P_6 P_7 (Fig. 1 Taf. I) bei der Zusammensetzung mit den übrigen Kräften ausübt. Das Kräftepolygon zeigt hier zunächst, dass, in Folge des Zusammenfallens der Ecke 7 mit der 5, weder die dem Gegenpaar vorausgehende Kraft P_5 oder 4 5, noch die Resultanten 3 5, 2 5, 1 5.... aus den vorangehenden Kräften P_5, P_4, P_3... durch Vereinigung mit dem Gegenpaar P_6 P_7 ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach geändert werden. Sie werden bloss parallel mit sich selbst verschoben, und zwar, wie das Seilpolygon zeigt, die Kraft P_5 von V nach e, die Resultante P_{1-5} von c nach d u. s. w. Ebenso wird die dem Gegenpaar vorangehende Seilpolygonseite V VI parallel mit sich selbst nach VII VIII verschoben, wenn das Gegenpaar mit den vorangehenden Kräften vereinigt wird; und es ist dies letztere im Grunde genommen auch nichts weiter als das parallele Verschieben einer Kraft in Folge ihrer Zusammensetzung mit dem Gegenpaar, der Kraft C 5 nämlich, welche die aus der Zerlegung der Kraft P_5 hervorgehende Spannung der zu verschiebenden Polygonseite darstellt.

Nun ist aber nach § 18 ein Gegenpaar in einer gegebenen Ebene allein schon durch den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt, dessen Grundlinie die eine seiner Kräfte ist, und dessen Spitze in der anderen liegt, vorausgesetzt, dass die Drehrichtung noch gegeben wird. Es kann daher vorkommen, dass man ein, bloss auf diese Art bestimmtes Gegenpaar mit anderen Kräften in seiner Ebene vereinigen soll oder auch nur mit einer einzigen, und es ist in diesem Falle offenbar wünschenswerth, die Parallelverschiebungen, welche es hervorbringt, construiren zu können, bloss aus jenen Angaben, ohne das Gegenpaar wirklich durch zwei gleiche, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte repräsentiren und diese in gewöhnlicher Weise in die Construction mit aufnehmen zu müssen. Dass dies möglich ist, lässt sich leicht zeigen, wobei wir uns bloss auf den Fall, auf den wir oben alle anderen zurückgeführt haben, zu beschränken brauchen, auf den nämlich, wo das Gegenpaar mit einer einzigen Kraft AP (Fig. 20) zu vereinigen ist.

Denken wir uns nämlich nach § 18 das gegebene Gegenpaar so verwandelt, dass die Grösse seiner Kräfte gleich derjenigen der gegebenen Kraft P ist, und verschieben wir dasselbe so, dass eine seiner Kräfte in dieselbe gerade Linie fällt, in der P wirkt, und dass sie dieser entgegengesetzt ist, dann heben sich die Kräfte AP und AP′ auf, und es bleibt nur noch die der Kraft P an Grösse, Richtung und Sinn gleiche P″ übrig, welche also keine andere als die parallel mit sich selbst verschobene Kraft P ist. Dabei muss das Dreieck AP′A″ oder auch das APA″ an Flächeninhalt gleich demjenigen sein, durch welches das Gegenpaar gegeben ist. Man darf also nur über der zu verschiebenden Kraft als Grundlinie ein Dreieck APA″ errichten, dessen Flächeninhalt gleich dem des Dreiecks ist, durch welches das Gegenpaar gegeben wird, um in der Spitze A″ dieses Dreiecks einen Punkt zu erhalten, durch welchen die in Folge ihrer Vereinigung mit dem Gegenpaar parallel verschobene Kraft gehen muss. Die Seite, nach welcher hin dabei das Dreieck APA″ über seiner Grundlinie errichtet wird, nach welcher hin also die gegebene Kraft verschoben wird, ist durch die gegebene Drehrichtung des Gegenpaars bedingt. Denkt man sich in der Spitze des Dreiecks eine Kraft parallel mit der gegebenen und in demselben Sinne wirkend, in seiner Grundlinie eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte, so muss das

Fig. 20.

durch beide gebildete Gegenpaar dieselbe Drehrichtung haben wie das gegebene. Diese Drehrichtung wird durch einen Kreispfeil, wie er in Fig. 20 eingezeichnet ist, angedeutet.

Wenden wir nun dies beispielshalber dazu an, um in Fig. 1 Taf. I die parallele Verschiebung der Seilpolygonseite V VI durch das Gegenpaar P_6 P_7, welches durch das Dreieck $A_6 P_6 P_7$ und durch den in dasselbe gezeichneten Kreispfeil gegeben sei, direct zu construiren. Dann haben wir uns in der Seite V VI eine der Kraft C 5, also dem Strahl, zu dem sie parallel ist, gleiche und in demselben Sinne gerichtete Kraft wirkend zu denken und irgendwie, etwa als V h, in sie einzutragen. Von demselben Punkte V aus und nach derselben Richtung hin trägt man dann die Seite P_6 A_6 des Dreiecks $A_6 P_6 P_7$ auf die nämliche Linie als V m auf und errichtet darüber das letztere Dreieck als V m n. Dabei hat man darauf zu achten, dass die Spitze n auf die Seite von V h zu liegen kommt, nach welcher hin die Kraft V h oder C 5 verschoben werden muss, um die nämliche Drehrichtung um einen Punkt ihrer früheren Lage zu erhalten, wie sie der Kreispfeil des Dreiecks A_6 P_6 P_7 angibt. Dann hat man bloss noch das Dreieck V m n in ein anderes, an Flächeninhalt ihm gleiches V h k zu verwandeln, dessen Grundlinie V h = C 5 ist, was durch Ziehen der Linie n h und der mit ihr parallelen m k leicht geschehen kann. Die Spitze k des verwandelten Dreiecks V h k ist dann der Punkt, durch welchen die verschobene Polygonseite, nämlich VII VIII, hindurchgehen muss. Indem man auf diese Weise direct von der Seite V VI auf die VII VIII übergeht, kann man sich auch vorstellen, dass das Seilpolygon von der Ecke V aus in der Richtung V VI bis ins Unendliche gehe, dort mit der unendlich kleinen und unendlich fernen Kraft, als welche das Gegenpaar auch betrachtet werden kann, verbunden werde und parallel mit sich selbst verschoben als VII VIII wieder zurückkehre.

§ 27. Die Reihenfolge bei der Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene ist gleichgültig. — Die Ordnung, in welcher Kräfte einer und derselben Ebene an beliebigen Angriffspunkten vermittelst des Kräfte- und Seilpolygons mit einander verbunden werden, ist gleichgültig. Das kann leicht erwiesen werden, und zwar können wir uns dabei auf den Fall beschränken, dass zwei unmittelbar auf einander folgende Kräfte mit einander vertauscht werden, weil durch eine solche fortgesetzte Vertauschung aus jeder Anordnung jede andere erhalten werden kann.

Fig. 21

Die beiden mit einander zu vertauschenden Kräfte seien beispielsweise die P_4 und P_5 (Fig. 21), welche entweder allein vorhanden sein, oder einem System von mehreren, zum Theil vorausgehenden, zum Theil nachfolgenden Kräften angehören können. Jedenfalls haben wir bloss denjenigen Theil 3 4 5 (Fig. 21[a]) des Kräftepolygons, dessen Pol C sei, zu betrachten, welcher aus den zu den Kräften parallel gezogenen und ihnen an Grösse und Sinn gleich gemachten Linien 3 4 und 4 5 besteht, wie wir auch vom Seilpolygon nur den Theil III IV V VI ins Auge zu fassen haben, welcher jenem Stück des Kräftepolygons entspricht, in der bekannter Weise, dass III IV parallel mit 3 C, IV V parallel mit 4 C und V VI parallel mit 5 C ist.

Bei der Vertauschung der Kräfte 4 und 5 mit einander haben wir im Kräftepolygon an den Punkt 3 die neue Kraft 3 4′ gleich P_5 anzureihen und an den Endpunkt 4′ derselben die neue Kraft 4′ 5′ gleich P_4. Der Endpunkt 5′ dieser letzteren muss, wie sofort ersichtlich, mit dem Punkte 5 zusammen-

fallen, und von da aus nimmt also das Kräftepolygon seinen früheren Verlauf, als ob jene Vertauschung nicht vorgenommen worden wäre. — Im Seilpolygon bleibt III IV parallel mit 3C, muss aber bis zum Durchschnittspunkt IV' mit der Kraft P_5, die jetzt $P_{4'}$ heisst, verlängert werden. Durch diesen Durchschnittspunkt hat man dann IV' V' parallel mit 4'C bis zum Schnitt V' mit der Kraft P_4, jetzt $P_{5'}$, zu ziehen und durch diesen Punkt endlich eine Parallele V' VI mit dem Strahl 5C. Es ist zu beweisen, dass diese letztere Linie nicht bloss parallel mit der V VI ist, sondern mit ihr zusammenfällt, und dieser Beweis ist geliefert, wenn dargethan wird, dass beide einen Punkt gemeinschaftlich haben. Dies ist aber sehr leicht: Die Resultante der beiden Kräfte P_4 und P_5 geht durch den Durchschnittspunkt f ihrer äussersten Seilpolygonseiten III IV und V VI; ebenso geht die Resultante der Kräfte $P_{4'}$ und $P_{5'}$, welches dieselben wie die vorigen sind, durch den Durchschnittspunkt ihrer äussersten Seilpolygonseiten III IV' und V' VI. Aber III IV' stimmt in Richtung und Lage mit III IV überein; wäre also der letztere Durchschnittspunkt von jenem f verschieden, so müsste er doch auf die Linie III IV' fallen und daher die Resultante der beiden Kräfte der Richtung und Lage nach mit dieser letzteren Linie übereinstimmen. Das ist aber nicht möglich; denn diese Linie schneidet die Kräfte P_4 und P_5 unserer Voraussetzung nach in zwei verschiedenen Punkten IV und IV', während doch deren Resultante durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt a hindurch gehen oder, wenn ein solcher nicht vorhanden ist, zu ihnen parallel sein muss. Die Durchschnittspunkte der beiden parallelen Linien V VI und V' VI mit der III IV' fallen also zusammen; das gleiche gilt somit für jene Linien selbst, und es nimmt folglich das Seilpolygon von V an denselben Verlauf, ob jene Vertauschung der Kräfte P_4 und P_5 vorgenommen wird oder nicht.

§ 28. **Abhängigkeit des Seilpolygons von der Lage des Pols.** — Die Resultante von Kräften in einer Ebene, welche durch ein Kräfte- und Seilpolygon vereinigt worden sind, muss natürlich von der Lage des Poles im Kräftepolygon unabhängig sein; ebenso die Resultante zweier oder beliebig vieler auf einander folgender dieser Kräfte. Welche Lage man also auch dem Pol geben mag, stets müssen sich die äussersten Seilpolygonseiten auf der geraden Linie schneiden, in welcher die Resultante aller Kräfte liegt, und irgend zwei Seilpolygonseiten auf der geraden Linie, in welcher die Resultante der dazwischen liegenden Kräfte gelegen ist. Daraus folgt der Satz:

Während der Pol des Kräftepolygons aus beliebig vielen Kräften in einer Ebene alle möglichen Wege in dieser Ebene durchläuft, bewegen sich die Durchschnittspunkte je zweier Seilpolygonseiten auf geraden Linien, auf denjenigen, in welchen die Resultanten der zwischenliegenden Kräfte gelegen sind.

§ **29.** Heben wir nun, wie in Fig. 2 Taf. I, irgend zwei Lagen des Poles, C und C', im Kräftepolygon 0 1 2 3 4 der vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 2^b) heraus, für welche die Seilpolygone 0 I II III IV V und 0'I'II'III'IV'V' sind, dann kann auf dieselbe Weise wie in § 21 für je zwei auf einander folgende Kräfte P_1 und P_2, P_2 und P_3, P_3 und P_4 nachgewiesen werden, dass die Schnittpunkte gleichnamiger Seilpolygonseiten, nämlich a, b und c, ebenso b, c und d, endlich c, d und e in einer und derselben, zur Verbindungslinie der Pole parallelen Geraden liegen müssen. Folglich liegen sämmtliche Schnittpunkte gleichnamiger Seilpolygonseiten in einer und derselben, zur Verbindungslinie der Pole geraden Linie, und damit ergibt sich nun auch die Verallgemeinerung des zweiten Satzes in § 21:

Wenn sich der Pol des Kräftepolygons aus beliebigen Kräften in einer Ebene in einer geraden Linie fortbewegt, so drehen sich die Seiten der Seilpolygone um Punkte einer und derselben, zur Bahn des Poles parallelen Geraden.

Mit Hülfe dieses Satzes können wieder die Seilpolygone für alle in einer geraden Linie CC' liegenden Pole leicht gefunden werden, wenn eines derselben, 0 I II III IV V (Fig. 2 Taf. I), für den Pol C gezeichnet ist. Man zieht die Linie MN parallel zu CC', sonst beliebig, und erhält so die Durchschnittspunkte a, b, c, d, e der Seilpolygonseiten 0 I, I II, II III etc. mit dieser Linie. Alsdann

zieht man die erste Seite 0′ I′ des Seilpolygons für den Pol C′ parallel zum Strahl 0 C′ durch den Schnittpunkt a; durch I′ und den zweiten Schnittpunkt b ist dann die zweite Seite I′ II′ zu legen, die dritte durch II′ und den Schnittpunkt c, die vierte durch III′ und den Schnittpunkt d u. s. w. f.

§ 30. **Das Seilpolygon als Mittelkraftslinie.** — Unter den verschiedenen Lagen, welche der Pol des Kräftepolygons annehmen kann, sind diejenigen besonders interessant, wo er in eine der Ecken jenes Polygons fällt. Die von ihm aus gezogenen Strahlen werden dann zum Theil Seiten, zum grössten Theil aber Diagonalen des Kräftepolygons und stellen folglich der Grösse, Richtung und dem Sinne nach die Resultanten der Kräfte dar, welche vom Pol aus bis zum Ende des betreffenden Strahls an einander gereiht sind. Es ist leicht zu beweisen, dass jene Resultanten in den Seilpolygonseiten liegen, welche den ihnen entsprechenden Diagonalen parallel sind. Wir nehmen zu diesem Behufe den Pol C (Fig. 3 Taf. I) des Kräftepolygons 0 1 2 . . . . . 8 aus den acht Kräften P_1, P_2 . . . . . P_8 im Anfangspunkte 0 des Polygons an. Dadurch verliert unsere Beweisführung nichts an Allgemeinheit, denn es können ja der Kraft P_1 noch beliebig viele andere Kräfte vorausgehen. Der Strahl 0 C, zu welchem die erste Seilpolygonseite 0 I parallel sein müsste, reducirt sich in Folge jener Annahme auf einen Punkt. Es ist also nicht bloss die Lage, sondern auch die Richtung jener Seilpolygonseite willkürlich. Aber diese Willkürlichkeit hat keinen Einfluss auf den ferneren Verlauf des Polygons, da die zweite Seilpolygonseite I II, durch irgend einen Punkt I der Kraft P_1 gehend, parallel mit 1 C zu ziehen ist und daher mit P_1 zusammenfällt. Der Eckpunkt II des Seilpolygons ist folglich auf jeden Fall der Durchschnittspunkt der Kraft P_1 mit der P_2. Durch II geht die dritte Seilpolygonseite II III, parallel zum Strahl oder zur Diagonale 2 C, bis zum Schnittpunkt III mit der Kraft P_3, und so kann man nun ganz in der früheren Weise die Construction des Seilpolygons 0 I II III . . . . . IX fortsetzen.

Die erste Seite 0 I desselben ist ganz beliebig und kann daher auch fortgelassen werden; die in sie treffende Componente, wenn P_1 in die bekannten zwei Seitenkräfte zerlegt wird, ist Null. Die zweite Seite I II fällt in dieselbe gerade Linie wie die Kraft P_1, und die in sie treffende Componente oder Spannung ist diese Kraft P_1 selbst. Die Resultante aus den Kräften P_1 und P_2 muss durch den Durchschnittspunkt der Seilpolygonseite II III mit der beliebigen Seite 0 I, also durch jeden Punkt der ersteren gehen; das kann sie aber auch, da sie parallel mit der Diagonale 2 C sein, also ganz in die Linie II III fallen muss. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die Resultante P_{1-3} in der Seilpolygonseite III IV, die P_{1-4} in der Seilpolygonseite IV V u. s. w. f. liegt, und dass endlich die letzte Seilpolygonseite VIII IX die Resultante sämmtlicher Kräfte enthält, deren Grösse, Richtung und Sinn im Kräftepolygon durch 0 8 dargestellt ist.

Ein solches Seilpolygon heisst daher mit Recht die Mittelkraftslinie (Mitteldruckslinie) der Kräfte P_1, P_2 . . . . . P_8. Es wird erhalten, wenn man den Pol im Kräftepolygon in den Anfangspunkt der ersten Kraft legt und dann wie bei jedem anderen Seilpolygon construirt.

Die mit einer späteren Kraft P_3 beginnenden Mittelkräfte P_{34}, P_{3-5} etc. fallen natürlich nicht mehr in die Seiten jenes Polygons. Sie gehen einfach, wie es im Allgemeinen der Fall sein muss, durch die Schnittpunkte der Seite II III mit denen IV V, V VI etc. und sind den Diagonalen 2 4, 2 5 etc. gleich, mit ihnen parallel und im nämlichen Sinne gerichtet.

Will man die Mittelkraftslinie der Kräfte P_3, P_4 . . . construiren, so muss man den Pol C′ im Kräftepolygon in den Anfangspunkt 2 der jetzigen ersten Kraft P_3 legen und dann wie oben verfahren. Der Theil der früheren Mittelkraftslinie, welche den Kräften P_3, P_4 . . . entspricht, nämlich II III . . . . . IX, und die neue Mittelkraftslinie haben dann offenbar den nämlichen Zusammenhang wie zwei Seilpolygone, welche dem nämlichen Kräftepolygon 2 3 4 . . . 8 angehören, aber aus verschiedenen Polen C und C′ construirt sind. Ihre gleichvielten Seiten schneiden sich auf der nämlichen, zur Verbindungslinie C C′ der Pole parallelen Geraden. Die erste Seite II′ III′ der neuen Mittel-

kraftslinie ist wieder beliebig, die zweite Seite III′ IV′ fällt mit der ersten Kraft P_3 zusammen, schneidet also die gleichvielte Seite III IV des alten Polygons in III. Jene Linie also, auf welcher sich die gleichvielten Seiten der beiden Polygone schneiden müssen, welche durch den Punkt III gehen und parallel zu CC′ oder 02 sein muss, ist keine andere als die Seite II III, in der die Mittelkraft der vorausgehenden Kräfte P_1 und P_2 liegt. Mit Hülfe dieser Linie kann man dann auf die bereits im vorigen § gelehrte Weise die zweite Mittelkraftslinie aus der ersten sehr leicht und bequem construiren. Nachdem man die Ecke IV′ des neuen Polygons als Schnittpunkt der Kraft P_3 mit der P_4 gefunden hat, kann man die Seite IV′ V′ sofort durch diesen Punkt und durch den Schnittpunkt a der Seite IV V mit der Linie II III ziehen; sie muss von selbst parallel zu 24 werden. Durch ihren Schnittpunkt V′ mit der Kraft P_5 und durch den Schnittpunkt b der Seite V VI mit der II III geht dann die Seite V′ VI′ u. s. w. f.

§ 31. Zwei ebene Kräftesysteme, in welchen eine Anzahl von Kräften gemeinschaftlich ist. — Fassen wir nun noch den Fall ins Auge, wo zwei ebene Kräftesysteme eine Anzahl von Kräften gemeinschaftlich haben. Kann die Ordnung, in welcher man die Kräfte mit einander vereinigt, beliebig genommen werden in beiden Systemen, so ist das Natürlichste, zuerst die denselben gemeinschaftlichen Kräfte mit einander zu verbinden und hierauf in jedem System die nicht gemeinschaftlichen anzufügen. Die aus den gemeinschaftlichen Kräften gebildeten Stücke der Kräfte- und Seilpolygone können dann ganz zusammenfallend gemacht werden, wenn man in ersteren ein und den nämlichen Punkt als Pol nimmt und die letzteren mit einer und derselben geraden Linie als erste Seite beginnt. Wenn aber in den Kräftepolygonen verschiedene Punkte als Pole angenommen werden, so sind die aus den gemeinschaftlichen Kräften gebildeten Seilpolygonstücke in demselben Fall wie die in § 29 behandelten Seilpolygone, und lässt sich daher das dort Entwickelte unmittelbar auf sie anwenden.

Aber es ist nicht immer thunlich, alle die gemeinschaftlichen Kräfte zuerst zu vereinigen. Es ist oft nothwendig, die nicht gemeinschaftlichen Kräfte vorweg zu nehmen, oder auch nur einen Theil der gemeinschaftlichen, worauf die ungemeinschaftlichen folgen müssen, nach denen alsdann erst der andere Theil der gemeinschaftlichen Kräfte kommen kann. Dies letztere ist z. B. der Fall, wenn in einem Kräftesystem P_1, P_2, P_3, P_4, P_5... einige Kräfte, z. B. die P_3 und P_4, in andere, $P_{3'}$, $P_{4'}$ von anderer Grösse und Richtung abgeändert werden sollen, ohne dass die Reihenfolge der Zusammensetzung eine andere wird. Man hat es dann mit den Kräftesystemen P_1, P_2, P_3, P_4, P_5... und P_1, P_2, $P_{3'}$, $P_{4'}$, P_5... zu thun, in denen zuerst einige gemeinschaftliche Kräfte, sodann ungemeinschaftliche und endlich wieder gemeinschaftliche auf einander folgen.

Fig. 22.

Wie dem aber auch sei, jedenfalls kann man bei Construction der Kräftepolygone die Anfangspunkte der beiden ersten ungemeinschaftlichen Kräfte zusammenfallen lassen, wie dies z. B. in Fig. 22 für die Kräftepolygone 0 h k l 1 2 3... und 0 m n 1′ 2′ 3′... geschehen ist, welche zwei Kräftesystemen angehören, die aus den ungemeinschaftlichen Kräften P_h, P_k, P_l einerseits, P_m, P_n andererseits und aus den gemeinschaftlichen P_1, P_2, P_3... bestehen, und bei deren Construction mit den ungemeinschaftlichen Kräften begonnen werden musste. Nimmt man nun in beiden Kräftepolygonen denselben Punkt C als Pol und beginnt beide Seilpolygone mit einer und derselben, zu 0C parallelen Seite, so hängen, wie bereits die Kräftepolygone im Punkte 0, die Seilpolygone mit jener Linie zusammen, und es können offenbar die so verbundenen Kräfte- und Seilpolygone als diejenigen eines einzigen Systemes von Kräften betrachtet werden, das aus allen unverändert gelassenen Kräften des einen von beiden gegebenen Systemen, welches dies auch sein mag, und aus denen des anderen

besteht, diese aber zwar von gleicher Grösse, Richtung und Lage, jedoch im entgegengesetzten Sinne genommen. So gehört das Kräftepolygon ... 3 2 1 l k h 0 m n 1′ 2′ 3′ ... dem Kräftesystem $-P_3$, $-P_2$, $-P_1$, $-P_l$, $-P_k$, $-P_h$, P_m, P_n, P_1, P_2, P_3 ... (kürzer —3, —2, —1, —l, —k, —h, m, n, 1, 2, 3 ...) an, wo die Zeichen — vor den Kräften andeuten sollen, dass dieselben im entgegengesetzten Sinne gedacht werden, ohne dass ihre Grösse, Richtung und Lage sich änderte. Das zugehörige Seilpolygon zu zeichnen haben wir für gegenwärtige Auseinandersetzungen nicht für nothwendig gehalten. Im oben genannten Kräftepolygon stellen die parallelen und gleichlangen Linien l n, 1 1′, 2 2′, 3 3′ etc. der Grösse, Richtung und dem Sinne nach die Resultanten der Kräftesysteme —l, —k, —h, m, n, bezw. —1, —l, —k, —h, m, n, 1 oder —2, —1, —l, —k, —h, m, n, 1, 2 etc. dar. Diese Resultanten stimmen aber nicht bloss der Grösse, Richtung und dem Sinne, sondern auch der Lage nach vollständig mit einander überein, da die Kräfte —1 und 1, —2 und 2 etc. sich aufheben. Die Seilpolygonseiten also, welche bezw. zu den Strahlen l C und n C, dann 1 C und 1′C, ferner 2 C und 2′C etc. etc. parallel sind, also die gleichvielten Seiten derjenigen Seilpolygonstücke, welche den gemeinschaftlichen Kräften angehören, schneiden sich alle auf einer und derselben geraden Linie, auf der Resultante der ungemeinschaftlichen Kräfte —l, —k, —h, m, n, wo bei der Bildung dieser Resultante die ungemeinschaftlichen Kräfte im einen Systeme, gleichviel in welchem, im entgegengesetzten Sinne genommen werden.

Dieser Satz hat viel Aehnlichkeit mit dem in § 29 erhaltenen Ergebniss, und in der That ist der Zusammenhang zwischen beiden leicht aufzudecken. Es hat offenbar auf das Seilpolygon eines Kräftesystems nicht den mindesten Einfluss, wenn man das Kräftepolygon zugleich mit dem Pol parallel mit sich selbst, d. h. so verschiebt, dass sich seine Eckpunkte und der Pol in parallelen Linien fortbewegen. Verschiebt man in solcher Weise das Kräftepolygon 0 m n 1′ 2′ 3′ ... (Fig. 22) längs den Linien n l, 1′ 1, 2′ 2, 3′ 3 ..., so kann man das den gemeinschaftlichen Kräften angehörige Stück n 1′ 2′ 3′ ... auf das entsprechende l 1 2 3 ... des anderen Polygons legen. Das den ungemeinschaftlichen Kräften angehörige Stück n m 0 kommt nach l m′ 0′ zu liegen und der Pol C nach C′. Nun kann man das zweite Seilpolygon als zu dem Kräftepolygon 0′ m′ l 1 2 3 ... mit dem Pol C′ gehörig betrachten, und die aus den gemeinschaftlichen Kräften gebildeten Seilpolygonstücke müssen daher in derselben Beziehung zu einander stehen wie zwei Seilpolygone überhaupt, welche aus demselben Kräftepolygon, aber unter Annahme verschiedener Pole construirt werden.

Hätte man die beiden Kräftepolygone von vorn herein so gezeichnet, dass die den gemeinschaftlichen Kräften entsprechenden Stücke auf einander fallen, also so wie die beiden 0 h k l 1 2 3 und 0′ m′ l 1 2 3 ..., so würden unter der Annahme des nämlichen Poles C für beide die den gemeinschaftlichen Kräften angehörigen Seilpolygonstücke so geworden sein, dass die gleichvielten Seiten derselben zu einander parallel gelaufen wären oder sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene geschnitten hätten. Würde man aber für beide Kräftesysteme zwei verschiedene, in beliebiger Lage gegen einander befindliche Pole C und C″ nehmen, so würden sich die gleichvielten Seiten obengenannter Seilpolygonstücke auf einer geraden Linie schneiden, die parallel zur Verbindungslinie C C″ der Pole wäre. Diese gerade Linie wird mit der Resultante aus den ungemeinschaftlichen Kräften, die des einen der beiden Systeme im entgegengesetzten Sinne genommen, der Richtung und Lage nach zusammenfallen, wenn die Verbindungslinie C C′ der Pole gleich, parallel und in demselben Sinne gerichtet ist wie die Verbindungslinie der Anfangspunkte 0 0′, welche jene Resultante der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorstellt, und wenn die ersten Seiten in beiden Seilpolygonen, die zu den parallelen Strahlen 0 C und 0′ C′ parallel sind, in *eine* zusammengelegt werden.

Der letzte Fall findet allemal statt, wenn die Anfangspunkte 0 und 0′ selbst als Pole genommen, wenn also die Mittelkraftslinien construirt werden. Denn die Verbindungslinie der Pole fällt dann mit jener der Anfangspunkte zusammen, und die ersten Seiten der Seilpolygone, welche

der Lage und Richtung nach beliebig angenommen werden dürfen, können immer als auf einander fallend gedacht werden.

Wir haben bereits angedeutet, dass die vorstehenden Entwicklungen auch Anwendung finden auf den Fall, wo ein zweites Kräftesystem 1 2 3′ 4′ 5 6 7... sich von einem ursprünglich gegebenen ersten 1 2 3 4 5 6 7... nur dadurch unterscheidet, dass einige Kräfte 3, 4 in diesem ihrer Grösse, Lage und Richtung nach in die 3′, 4′ abgeändert werden. Die Kräfte- und Seilpolygone der vorausgehenden gemeinschaftlichen Kräfte kann man zusammenfallen lassen; die Kräftepolygonstücke aus den, den ungemeinschaftlichen nachfolgenden gemeinschaftlichen Kräften 5, 6, 7... erscheinen dann gegen einander parallel um ein Stück verschoben, das der Grösse und Richtung nach mit der Resultante aus den Kräften 3, 4, — 3′, — 4′ oder auch — 3, — 4, 3′, 4′ übereinstimmt, und die gleichvielten Seiten der Seilpolygonstücke, welche den letzteren gemeinschaftlichen Kräften zugehören, schneiden sich auf der geraden Linie, in welcher jene Resultante liegt.

Auch der zu Ende des vorigen § besprochene Fall gehört hierher. Die beiden Kräftesysteme 1, 2, 3, 4, 5... und 3, 4, 5... haben in der That die Kräfte 3, 4, 5... gemeinschaftlich, während die bloss im ersten System vorkommenden 1, 2 als ungemeinschaftlich zu betrachten sind. Die gleichvielten Seiten der aus beiden Systemen construirten Mittelkraftslinien schneiden sich daher auf der geraden Linie II III (Fig. 3 Taf. I), in welcher die Resultante der Kräfte 1, 2 oder — 1, — 2 liegt.

§ 32. Beispiel: Mitteldruckslinien eines Gewölbes für verschiedene Horizontalschübe im Scheitel desselben. — Seine vorzüglichste Anwendung findet das im vorigen § gefundene Resultat da, wo das Kräfte- und Seilpolygon eines Systems von Kräften bekannt sind und

Fig. 23

diejenigen für ein anderes System, das mit jenem eine Anzahl von Kräften gemeinschaftlich hat, construirt werden sollen. In Fig. 23 wurde als Beispiel der Fall behandelt, wo die acht Kräfte P_1, P_2, $P_3 \dots P_8$, welche in den mit denselben Buchstaben versehenen Verticallinien wirken, und

deren Grössen in Fig. 23[a] mit h 1, 1 2, 2 3.... gegeben sind, zuerst mit einer neunten horizontalen Kraft P_h von der Grösse 0 h (Fig. 23[a]) vereinigt wurden. Diese Zusammensetzung sei vermittelst des Kräftepolygons 0 h 1 2..... 8 und des unter Zugrundelegung des Anfangspunktes 0 als Pol construirten Seilpolygons, hier eigentlich der Mittelkraftslinie I II III.... VIII IX, vorgenommen worden. Man sieht, diese Mittelkraftslinie stimmt überein mit der Mitteldruckslinie eines Gewölbes, bei welchem P_1, P_2..... P_8 die Gewichte der Lamellen sind, in welche es durch verticale Schnittebenen zerlegt wird, und für welches P_h der Horizontalschub im Scheitel ist. Die Aufgabe ist, diejenige Mitteldruckslinie zu construiren, welche, unter Beibehaltung der Gewichte P_1, P_2..... P_8, einem anderen, der Grösse und Lage nach von jenem verschiedenen Horizontalschub $P_{h'}$ entspricht.

Behält man das aus den Kräften P_1, P_2..... P_8 construirte Kräftepolygon h 1 2 3.... 8 bei, so darf man nur den neuen Horizontalschub $P_{h'}$ rückwärts von h als h 0′ auftragen, um in 0′ h 1 2 3.... 8 das Kräftepolygon des neuen Systems zu erhalten. Zur Construction der neuen Mittelkraftslinie muss 0′ als Pol genommen werden, und es gilt für diese also betreffs ihrer Beziehung zur alten der Satz, dass die gleichvielten, den gemeinschaftlichen Kräften zugehörigen Seiten sich in den nämlichen Punkten der Geraden schneiden, in welcher die Resultante der ungemeinschaftlichen Kräfte, die des einen Systems entgegengesetzt genommen, also hier die Resultante der Kräfte P_h und $-P_{h'}$ oder $-P_h$ und $P_{h'}$, liegt. Diese Gerade ist also horizontal wie die Kräfte P_h und $P_{h'}$ oder parallel zur Verbindungslinie 0 0′ der Pole. Um einen Punkt von ihr zu erhalten, kann man die zu vereinigenden Kräfte P_h und $-P_{h'}$ von einem beliebigen Punkte 0 aus in ein Kräftepolygon 0 h 0′ zusammentragen, einen beliebigen Punkt C als Pol nehmen und daraus das Seilpolygon B I I′ B construiren, dessen äusserste Seiten sich in dem gesuchten Punkte B schneiden. Auf der durch ihn gelegten Horizontallinie MN müssen sich die gleichvielten Seiten der beiden Mitteldruckslinien treffen. Verlängert man also die erste Seite I II der ersten Mitteldruckslinie bis zu ihrem Durchschnitt a mit MN, so geht durch diesen Punkt und den Punkt I′, wo der Horizontalschub $P_{h'}$ die erste Verticalkraft P_1 schneidet, die Seite I′ II′ der neuen Mitteldruckslinie. In unserer Fig. 23 konnte der Schnittpunkt a nicht mehr erhalten werden. In einem solchen Fall muss eben die Seite I′ II′ direct gezeichnet, d. h. parallel zum Strahl 1 0′ im Kräftepolygon gezogen werden. Die Seite II′ III′ geht dann durch den Durchschnittspunkt b der gleichvielten Seite II III der ursprünglichen Mitteldruckslinie mit der Linie MN und durch den Punkt II′ hindurch, in welchem die vorhergehende Seite I′ II′ die Kraft P_2 getroffen hat, u. s. w. f. für alle folgenden Seiten. In einem Falle, wo die beiden Punkte, deren Verbindungslinie die neue Seilpolygonseite ergibt, zu nahe beisammen liegen, wie dies z. B. in unserer Figur bei der Seite VI′ VII′ stattfindet, muss diese Seite eben auch direct, d. h. parallel zum entsprechenden Strahl 6 0′ im Kräftepolygon gezogen werden.

§ 33. **Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene.** — Damit Kräfte, welche in einer Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken, im Gleichgewicht sind, muss die Resultante aus allen, mit Ausnahme der letzten, dieser letzten gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt sein. In Folge dessen schliesst sich das Kräftepolygon, das aus solchen Kräften construirt wird. Es fallen also der erste, d. h. vom Pol nach dem Anfangspunkte der ersten Kraft gehende Strahl und der letzte, nämlich der nach dem Endpunkte der letzten Kraft gehende, zusammen. Die zu diesen Strahlen parallelen Seilpolygonseiten, die vor der ersten Kraft liegende und die auf die letzte Kraft folgende, müssen also jedenfalls parallel werden. Aber dies reicht allein nicht aus. Denn da die Resultante aus allen Kräften weniger der letzten mit dieser in derselben geraden Linie liegen muss, so muss der Durchschnittspunkt der ersten Seilpolygonseite mit derjenigen, welche auf die vorletzte Kraft folgt, der Punkt also, durch den jene Resultante hindurchgehen muss, auf der geraden Linie liegen, welche die letzte Kraft enthält. Durch diesen Punkt, als den Durchschnittspunkt der auf die vorletzte Kraft folgenden Polygonseite mit der letzten Kraft, muss die nächste, also letzte Polygonseite gehen, und da diese parallel mit der ersten sein muss,

so fällt sie mit derselben zusammen. — Die auf die letzte Kraft folgende Polygonseite muss also mit der ersten zusammenfallen oder das Seilpolygon muss sich, wie man sagt, auch schliessen, und zwar muss diese Beweisführung für alle Seilpolygone zutreffen, die gezeichnet werden können. Im Falle der Mittelkraftslinie muss die auf die vorletzte Kraft folgende Seite, welche die Resultante der vorausgehenden Kräfte enthält, mit der letzten Kraft zusammenfallen, jene sich also gleichfalls schliessen.

Nimmt man beispielsweise zu den neun Kräften P_1, P_2 ...... P_9 in Fig. 1 Taf. I noch eine zehnte, P_{10}, hinzu, welche der Resultante P_{1-9} oder 0 9 jener Kräfte gleich, aber in derselben geraden Linie entgegengesetzt ist, im Kräftepolygon also durch 9 0 der Grösse, Richtung und dem Sinne nach dargestellt wird, so schliesst sich das Kräftepolygon 0 1 2 ..... 8 9 0, und die auf die letzte Kraft P_{10} folgende Seilpolygonseite X 0 fällt mit der ersten 0 I zusammen; das Seilpolygon schliesst sich auch. Aehnliches ergibt sich in Fig. 3 Taf. I für die Mittelkraftslinie, wenn man den acht Kräften P_1 bis P_8 eine neunte von der Grösse und Richtung 8 0 in der geraden Linie VIII IX hinzufügt.

Damit Kräfte, welche in einer und derselben Ebene an beliebigen Angriffspunkten wirken, im Gleichgewicht sind, muss sich sowohl das Kräfte- als auch jedes Seilpolygon, das aus ihnen construirt werden kann, schliessen.

Wenn sich das Kräftepolygon nicht schliesst, so haben sämmtliche Kräfte eine Resultante, deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons dargestellt ist. Ihre Lage ist bekanntlich im Seilpolygon dadurch bestimmt, dass sie durch den Schnittpunkt der ersten mit der auf die letzte Kraft folgenden Seilpolygonseite gehen muss. Ein solcher Schnittpunkt wird aber allemal erhalten, wenn nicht zufällig, wie z. B. in Fig. 24, der Anfangspunkt 0, der Endpunkt 4 und der Pol C des Kräftepolygons in eine gerade Linie zu liegen kommen. Dann werden jene Seilpolygonseiten 0 1 und IV V parallel. Wie dann die Lage der Resultante, deren Grösse, Richtung und Sinn immer noch durch 0 IV im Kräftepolygon dargestellt wird, zu finden ist, sieht man leicht, wenn man wie in § 24 alle Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 in Componenten nach den Richtungen der Seilpolygonseiten, die in ihnen sich schneiden, zerlegt. Diese Componenten heben sich alle paarweise auf, bis auf die in der ersten und letzten Seite wirkenden, deren Grösse, Richtung und Sinn durch 0 C bezw. C 4 vorgestellt sind. Auf diese beiden parallelen Kräfte sind also dann die gegebenen zurückgeführt, und es können dieselben auf bekannte Weise in eine Resultante vereinigt werden, welche die Resultante der gegebenen Kräfte ist; zweckmässiger jedoch würde es sein, anstatt des Poles C im Kräftepolygon einen andern, der eine solche specielle Lage wie jener nicht mehr hat, anzunehmen, oder diese besondere Lage des Poles von vorn herein zu vermeiden. In dem noch specielleren Falle, wo die beiden Linien 0 I und IV V zusammenfallen, schliesst sich das Seilpolygon, nicht aber das Kräftepolygon. Der Angriffspunkt der Resultante kann dann in jenen zusammenfallenden Linien beliebig angenommen werden. Sie selbst liegt in jener Linie und ist der Summe oder Differenz der Strahlen 0C und C4 gleich, je nachdem diese gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

Fig. 24

a) b)

§ 34. Fall, wo bloss das Kräfte- und nicht auch das Seilpolygon sich schliesst. —

Die Componenten, welche in den zu einander parallelen Seiten 0 I und IV V des Seilpolygons in

Fig. 24 wirken, sind dann nicht mehr in eine Resultante zu vereinigen, wenn sie einander gleich und entgegengesetzt sind. Das kann aber nur dann stattfinden, wenn der Endpunkt des Kräftepolygons in den Anfangspunkt desselben zu liegen kommt, wenn sich also wie z. B. in Fig. 25 das Kräftepolygon schliesst. Schliesst sich dann das Seilpolygon nicht auch, in welchem Falle die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht wären, sondern ist die letzte Seite IV V nur parallel mit der ersten, so wirken in diesen beiden Linien zwei gleiche, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, ein Gegenpaar, auf welches die sämmtlichen Kräfte zurückgeführt werden können. Jene Kräfte sind an Grösse und Richtung gleich dem Strahl im Kräftepolygon, der den zusammenfallenden Anfangs- und Endpunkt desselben mit dem Pol verbindet. Ihr Sinn ist durch Zerlegung der ersten oder letzten der gegebenen Kräfte leicht zu erhalten. Er ist für die in der ersten Seilpolygonseite wirkende Kraft der vom Anfangspunkt des Kräftepolygons nach dem Pol desselben gerichtete, für die in der letzten Seilpolygonseite der entgegengesetzte.

Fig. 25 a) b)

Wenn folglich das Kräftepolygon gegebener, in einer und derselben Ebene gelegener Kräfte sich schliesst, oder wenn im Kräftepolygon solcher Kräfte eine Schleife vorkommt der Art, dass der Endpunkt einer Kraft mit dem Anfangspunkt einer vorhergehenden zusammenfällt, und das Seilpolygon aus diesen Kräften schliesst sich nicht ebenfalls, sondern die diesen Kräften zugehörigen Seilpolygonseiten sind bloss parallel, fallen nicht zusammen, so lassen sich jene Kräfte nicht in eine Resultante vereinigen, sondern nur auf ein Gegenpaar zurückführen. Die Kräfte dieses Gegenpaares liegen in den parallelen Seilpolygonseiten, ihre Grösse ist gleich dem Strahl im Kräftepolygon, der von dem zusammenfallenden Anfangs- und Endpunkt nach dem Pol gezogen wird, und ihr Sinn ist durch Zerlegung entweder der ersten oder letzten der in Betracht kommenden Kräfte nach den in ihnen zusammenstossenden Seilpolygonseiten leicht zu erhalten.

§ 35. **Beziehungen zwischen Kräfte- und Seilpolygon von Kräften in einer Ebene.** — Wenn Kräfte in einer Ebene einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben, oder wenn sie sich nur sämmtlich in einem und demselben Punkt a (Fig. 26ᵇ) der Ebene schneiden, in den dann ihre Angriffspunkte verlegt werden können, so muss ihre Resultante durch denselben Punkt hindurchgehen, so dass bloss noch Grösse, Richtung und Sinn derselben zu bestimmen ist; dies geschieht schon durch das aus den Kräften zu zeichnende Kräftepolygon 0 1 2 3... (Fig. 26ᵃ) allein; ein Seilpolygon ist also für solche Kräfte nicht nothwendig. Zeichnet man es doch, wie in Fig. 26ᵇ geschehen, für irgend einen Pol C des Kräftepolygons, so muss der Durchschnittspunkt VI der äussersten Seilpolygonseiten in der Resultante, also mit dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt a aller Kräfte in einer zur Schlusslinie des Seilpolygons parallelen Geraden gelegen sein. Man erhält auf diese Weise wieder zwei Figuren a) und b) Fig. 26, in denen die Seiten bezw. parallel sind, und bei denen jedem geschlossenen Polygon der einen ein Knoten entspricht, in dem sich so viele den Seiten jenes Polygons parallele Gerade schneiden, als das Polygon Seiten hat, und umgekehrt

Die Figuren sind also reciprok (vgl. § 20). Der hieraus folgende rein geometrische Satz ist leicht in Worten auszusprechen.

Kommt zu den fünf Kräften in Fig. 26 eine sechste, der Resultante aus jenen gleiche und in derselben geraden Linie entgegengesetzte, P_6, hinzu, so sind diese sechs Kräfte im Gleichgewicht; ihr Kräfte- sowohl als auch ihr Seilpolygon schliesst sich und beide, jenes mit den zugehörigen Strahlen, dieses mit den Linien, in denen die Kräfte liegen, und welche bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt a reichen, sind reciproke Figuren, dieselben wie die vorhin schon genannten. Um dies recht deutlich zu machen, haben wir wieder die entsprechenden Seiten mit gleichen Ziffern bezeichnet, welche in Fig. a) in Haarstrichen, in Fig. b) mit fetter Schrift gedruckt sind.

Fig. 26

Zwischen dem geschlossenen Kräfte- und Seilpolygon von im Gleichgewicht befindlichen Kräften einer Ebene, die sich nicht mehr in einem und demselben Punkte schneiden, finden ähnliche Beziehungen statt, wenn man nur die auf einander folgenden Schnittpunkte a, b, c... der Kräfte unter sich, den der Kraft P_1 mit P_2 (Fig. 27[b]), der Kraft P_2 mit P_3 u. s. w. mit heranzieht. Dem Knoten C in Fig. 27[a], von dem fünf Seiten ausgehen, entspricht das Fünfeck I II III IV V in Fig. 27[b]. Den Dreiecken C 0 1, C 1 2 etc. in Fig. a) entsprechen die Knoten I, II... in Fig. b), den Knoten 0, 1, 2... in Fig. a) die Dreiecke I e V, I a II, II b III, ... Aber die Reciprocität der beiden Figuren ist doch nicht mehr vollständig; den Ecken a, b, c... in Fig. b), in welchen sich bloss 2 Seiten scheiden, können keine geschlossenen Polygone in Fig. a) mehr entsprechen.

Fig. 27

Die Reciprocität von Kräfte- und Seilpolygon wird aber wieder vollkommen, wenn man im ersteren zwei Pole C und C′ annimmt und die beiden zugehörigen Seilpolygone 0 I II III... und 0′ I′ II′ III′... zeichnet, wie in Fig. 4 Taf. II für 4 Kräfte P_1 bis P_4 und ihre Resultante P_{1-4} geschehen ist. Die Figuren a) und b) sind vollständig reciprok, wie die Bezifferung deutlich zeigt. Selbstverständlich kann auch hier statt der Resultante die ihr gleiche und in derselben geraden

Linie entgegengesetzte Kraft P_5 hinzugenommen und dadurch das Kräfte- sowohl wie die beiden Seilpolygone zu geschlossenen gemacht werden.

Dies bleibt so, man erhält immer wieder reciproke Figuren, wenn man das eine der beiden Seilpolygone oder auch alle beide durch die Mittelkraftslinie ersetzt, was geschieht, indem man einen oder alle beiden Pole in Ecken des Kräftepolygons legt. So sind die Figuren 5 und 6 Taf. II gezeichnet, in deren beiden Theilen die eingeschriebene Bezifferung leicht reciproke Figuren erkennen lässt.

Da für Kräfte, welche sich alle in einem und demselben Punkt ihrer Ebene schneiden, die Mittelkraftslinie sich auf diesen Punkt reducirt, so ist Fig. 26 eigentlich nur ein specieller Fall von Fig. 5 Taf. II.

§ **36. Zerlegung einer Kraft in Componenten, die mit ihr in einer Ebene liegen.** — Die Aufgabe, eine gegebene Kraft in zwei oder mehrere Componenten zu zerlegen, welche mit ihr in einer Ebene liegen und beliebige Angriffspunkte haben, ist, in dieser Allgemeinheit gestellt, völlig unbestimmt. Ist es ja doch schon die, eine Kraft in zwei mit ihr in einer Ebene gelegene Componenten zu zerlegen, die an demselben Punkte wie sie angreifen (§ 14). Es können also willkürliche Bestimmungen über die zu erhaltenden Componenten getroffen werden. In den Anwendungen sind meistens Richtung und Lage dieser Componenten, d. h. der geraden Linien gegeben, in denen sie wirken. Aber damit kann unter Umständen schon zu viel gethan sein, so dass die Lösung der Aufgabe unmöglich wird. Es ist daher nothwendig, dass wir etwas tiefer auf dieselbe eingehen, wobei wir immer voraussetzen werden, dass Richtung und Lage der Componenten von vorn herein gegeben sind.

1. Soll eine gegebene Kraft in zwei mit ihr in einer Ebene gelegene Componenten zerlegt werden, so müssen sich dieselben, d. h. die geraden Linien, in denen sie liegen, in dem nämlichen Punkt der gegebenen Resultante schneiden, oder sie müssen beide zu derselben parallel sein, wenn die Zerlegung überhaupt möglich sein soll. Denn umgekehrt geht ja die Resultante zweier sich schneidender Kräfte stets durch deren Schnittpunkt hindurch; liegt derselbe also nicht in der gegebenen Kraft, so kann die Resultante niemals mit ihr zusammenfallen. Ebenso ist die Resultante paralleler Kräfte parallel mit ihnen und kann daher nur dann mit der gegebenen Resultante identisch werden, wenn jene parallel zu dieser sind.

Wenn die gesuchten Componenten, deren Richtungen vorgeschrieben sind, sich in einem Punkt der Resultante schneiden, so darf man diese nur mit ihrem Angriffspunkt in diesen Schnittpunkt verlegen und dortselbst nach den gegebenen Richtungen mittelst des Kräfteparallelogramms oder Kräftepolygons in der Art zerlegen, wie es schon im § 14 gelehrt wurde. Die Aufgabe ist vollständig bestimmt. Das Kräftepolygon kann auch seitwärts gezeichnet werden, indem man (Fig. 28[a]) von einem beliebigen Punkt 0 aus die gegebene Resultante P_{12} der Grösse, Richtung und dem Sinne nach als 0 2 aufträgt und durch ihre Endpunkte Parallele zu den gegebenen Richtungen P_1, P_2 der Componenten zieht. Die Strecken dieser Parallelen zwischen ihrem Schnittpunkte 1 und jenen Endpunkten 0, 2 der Resultante stellen alsdann, in dem Sinne genommen, dass man auf ihnen vom Anfangspunkte 0 der Resultante zu ihrem Endpunkte 2 gelangt, die Grösse, Richtung und den Sinn der gesuchten Componenten vor. Sie in die gegebenen geraden Linien, in denen sie wirken,

Fig. 28

a) b)

wirklich einzutragen ist meist nicht nothwendig. Ebensowenig ist es in der Regel erforderlich, das Seilpolygon zu zeichnen, das zu jenem Kräftepolygon gehört. Wollte man es doch thun, so müsste eben im Kräftepolygon ein beliebiger Punkt C als Pol angenommen und die erste Seite 0 I des Seilpolygons parallel zum ersten Strahl, sonst aber beliebig gezeichnet werden. Die beiden anderen Seiten I II und II III ergeben sich auf die bekannte Weise. Die erste und letzte müssen sich in einem Punkte α auf der Resultante schneiden. Die Mittelkraftslinie, das Seilpolygon für den Anfangspunkt 0 als Pol, wird I′ II′ III′ und hat eine einzige Ecke, II′ oder a, den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der beiden Componenten und der Resultante, wenn die erste, ganz beliebige Seite wie gewöhnlich nicht mitgezählt wird.

Wenn die Linien P_1 und P_2 (Fig. 29 und Fig. 30), in denen die gesuchten Componenten liegen sollen, parallel zu der zu zerlegenden Kraft P_{12} sind, so führt die Construction des Kräftepolygons (Fig. 29ª und 30ª) allein nicht zum Ziel; denn die beiden Parallelen zu jenen Linien, welche durch die Endpunkte der an einer beliebigen Stelle abgetragenen Resultante 0 2 gezogen werden, fallen mit dieser Resultante zusammen; ihr Durchschnittspunkt wird folglich unbestimmt. Man muss hier einen beliebigen Punkt ausserhalb der Resultante als Pol annehmen und das Seilpolygon in folgender Weise construiren. Die erste Seite 0 I ist parallel zum ersten Strahl 0 C und ausserdem, ihrer Lage nach, beliebig. Ihr Durchschnitt I mit der Linie, in der die erste Componente P_1 liegen soll, gibt den ersten Eckpunkt. Durch ihren Durchschnittspunkt α mit der Resultante P_{12} geht auch die dritte Seite des Seilpolygons. Diese kann also parallel zum dritten Strahl 2 C gezeichnet werden und gibt in ihrem Durchschnitt mit der Linie P_2 den zweiten Eckpunkt II des Seilpolygons. Damit ist nun auch die zweite Seite I II desselben bestimmt und folglich auch der zweite Strahl 1 C, der, zu ihr parallel, durch den Pol C geht und die Resultante 0 2 in seinem Durchschnittspunkt 1 mit ihr in die gesuchten zwei Componenten 0 1 und 1 2 theilt. Der Sinn derselben ist wieder so aufzufassen, dass man auf ihnen vom Anfangspunkt 0 der Resultante über den Punkt 1 nach deren Endpunkt 2 gelangen kann. Je nachdem also der Theilungspunkt 1 zwischen den Endpunkten der Resultante oder ausserhalb derselben liegt, sind die Componenten in gleichem oder entgegengesetztem Sinne gerichtet. Das erstere findet immer statt, wenn die Linien P_1 und P_2, in welche die Componenten zu liegen kommen sollen, auf beiden Seiten der Resultante P_{12} liegen (Fig. 29), das andere, wenn sie sich beide auf der nämlichen Seite befinden (Fig. 30).

Fig. 29

a) b)

Fig. 30

a) b)

2. Bei der Zerlegung einer gegebenen Kraft in drei Componenten, die mit ihr in einer Ebene gelegen sind, und deren Richtung und Lage gegeben ist, können folgende Unterfälle vorkommen.

a) Zwei von den drei Componenten schneiden sich in einem und demselben Punkt der zu zerlegenden Resultante, durch den die dritte aber nicht hindurchgeht, oder, was dem ganz ähnlich ist, zwei der

Componenten sind parallel zur Resultante, die dritte aber nicht. Dass die Auflösung in diesem Falle unmöglich ist, lässt sich leicht zeigen. Denn gäbe es drei solche Componenten, so würden die beiden ersten mit einander vereinigt eine Mittelkraft ergeben, die entweder durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt mit der gegebenen Resultante hindurchgehen oder zu ihnen und dieser parallel sein würde. Diese Mittelkraft mit der dritten Componente von obiger Beschaffenheit vereinigt würde dann eine Resultante geben, welche gewiss nicht auch durch jenen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt hindurchgehen oder gewiss nicht auch dieselbe Richtung wie die gegebene Resultante haben würde. Sie könnte also niemals mit dieser identisch werden.

b) Die drei Componenten schneiden sich in einem und dem nämlichen Punkt oder sind parallel zu einander. Wenn dabei jener gemeinschaftliche Durchschnittspunkt nicht in der gegebenen Resultante liegt, oder wenn die drei Componenten nicht zugleich parallel zu dieser sind, dann ist die Lösung, wie schon aus dem ersten Fall ersichtlich, nicht möglich. Liegt aber der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Linien, in welche die Componenten fallen sollen, auf der zu zerlegenden Kraft, oder sind alle drei parallel zu dieser, so wird die Aufgabe möglich, aber unbestimmt. Denn im ersteren Falle geht das Kräftepolygon in ein Viereck über, von dem eine Seite der Grösse und Richtung nach, die drei anderen aber nur der Richtung nach bestimmt sind, das also noch Willkürlichkeiten zulässt. Im zweiten Falle, in welchem man wieder das Seilpolygon zeichnen muss, ist zwar die erste und vierte Seite desselben, welche sich in einem Punkte der gegebenen Resultante schneiden, bestimmt, nicht aber die zwischenliegende zweite und dritte Seite, also auch nicht die zu diesen parallelen Strahlen im Kräftepolygon.

c) Die drei geraden Linien, in denen die drei Componenten liegen sollen, schneiden sich in drei verschiedenen Punkten, von denen keiner auf der gegebenen Resultante liegt, oder, was dem ganz ähnlich ist, zwei der Componenten sind parallel, aber nicht zugleich auch zur Resultante, und werden von der dritten geschnitten, welche selbst wieder die Resultante schneiden oder zu ihr parallel sein kann. In diesem Falle ist die Auflösung der Aufgabe möglich und bestimmt, d. h. es gibt nur eine einzige Lösung. Dies ist leicht zu erweisen: Man verbinde in den Theilen b) der Figuren 7 bis 11 Taf. III, welche die verschiedenen möglichen Fälle vorstellen, den Punkt III, in welchem die Resultante P_{1-3} irgend eine von den Componenten, die wir mit P_3 bezeichnen, schneidet, mit dem Durchschnittspunkt II der beiden anderen P_1, P_2. Dann kann die Resultante in ihrem Schnittpunkt mit jener ersten Componente in ganz bestimmter Weise in zwei Componenten zerlegt werden, welche bezw. in den Linien P_3 und II III liegen, und von denen letztere wieder in ganz bestimmter Art in zwei, in den Linien P_1, P_2 liegende Componenten zerfällt. Die drei in P_3, P_2, P_1 liegenden Componenten können also gefunden werden, und zwar erhält man immer die nämlichen, in welcher Reihenfolge man auch jene Zerlegungen vornehmen, d. h. von welchem der möglicherweise vorhandenen drei Durchschnittspunkte der Resultante mit den drei Componenten man dabei ausgehen und welche von den beiden anderen Componenten man als erste oder zweite nehmen mag. Denn gäbe es in P_1 und P_2 noch zwei andere, von jenen verschiedene Componenten, so würde deren Resultante, wenn nicht in Grösse und Richtung, doch gewiss in Grösse oder Richtung von der in der Linie II III liegenden Kraft, die wir vorhin zerlegt haben, verschieden sein. In keinem Falle könnte sie aber mit der dritten Componente P_3 vereinigt die gegebene Resultante P_{1-3} geben.

Bei der wirklichen Ausführung der Aufgabe nimmt man jene Zerlegungen wieder besser mittelst des Kräftepolygons, statt des Parallelogramms der Kräfte, vor. Man trägt zu diesem Behufe die Resultante ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach seitwärts als 0 3 (s. die Theile a) der Figuren 7 bis 11 Taf. III) ab. Für die erste Zerlegung hat man dann nur durch die Endpunkte 3 und 0 derselben Parallele 3 2 und 0 2 bezw. zu den Linien P_3 und II III zu ziehen, so sind 0 2 und 2 3, in diesem Sinne genommen, die Componenten. Die erstere, 0 2, zerlegt man

dann, vorausgesetzt, dass die Linien P_1 und P_2 nicht parallel sind, was man durch passende Auswahl von P_3 leicht vermeiden kann, sehr einfach wieder dadurch, dass man durch ihre Endpunkte 0 und 2 Parallele 0 1 und 1 2 zu diesen Linien zieht, welche sich in dem Punkte 1 schneiden. 0 1 und 1 2 sind dann, zusammen mit 2 3, die gesuchten Componenten.

Von besonderem Interesse ist der in den Figuren 10 und 11 Taf. III dargestellte Fall. Hier wurde die Resultante P_{1-3} in eine zu ihr parallele und ihr gleiche Kraft P_1 bezw. P_2 und in ein Gegenpaar in den parallelen Linien P_2, P_3, bezw. P_1, P_3 zerlegt; denn wie leicht zu sehen, werden die Componenten in diesen Parallellinien stets von gleicher Grösse und entgegengesetztem Sinne. Umgekehrt gibt das Gegenpaar zusammengesetzt mit der Kraft P_1 bezw. P_2 die der letzteren gleiche und parallele Resultante P_{1-3} von gleichem Sinne (vgl. § 26).

Im Grunde hat man bei obiger Construction nichts anderes gethan, als zuerst die Mittelkraftslinie IV III II I und aus ihr das Kräftepolygon 0 1 2 3 mit dem Pol im Anfangspunkt 0 gezeichnet. Die Mittelkraftslinie ist hier in der Regel dem allgemeineren Seilpolygon vorzuziehen, weil die Construction sehr einfach wird. Es steht aber nichts im Wege, die Zerlegung auf etwas allgemeinerem, mehr Spielraum lassendem Wege mit Hülfe des Seilpolygons für einen ganz beliebigen Pol im Kräftepolygon vorzunehmen, wenn dies aus irgend welchen Gründen wünschenswerth sein sollte. In Fig. 12[a] und 12[b] auf Taf. III ist es für dieselbe Resultante P_{1-3} und für die nämlichen drei Linien P_1, P_2, P_3, in welchen die drei Componenten liegen sollen, geschehen, wie wir sie schon in Fig. 7 behandelt haben. Nachdem seitwärts die Resultante P_{1-3} ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach als 0 3 abgetragen war, wurde ein beliebiger Punkt C als Pol des zu zeichnenden Kräftepolygons angenommen. Dadurch waren alsdann der erste und letzte Strahl, 0 C und 3 C, in diesem bestimmt, und da sich die zu ihnen parallelen ersten und letzten Seilpolygonseiten in einem Punkte der Resultante P_{1-3} schneiden müssen, so konnte man jene zeichnen, indem man durch einen beliebigen Punkt α der letzteren Linie 0 I und III IV bezw. parallel zu den Strahlen 0 C und 3 C zog. Offenbar kann hierbei der Pol C immer so gewählt werden, dass die beiden eben gezeichneten Seilpolygonseiten zwei von den drei gegebenen Linien P_1 und P_3 schneiden. Die Schnittpunkte sind natürlich nichts anderes als die Eckpunkte I und III des Seilpolygons. Es fehlt also noch der Eckpunkt II, welcher, auf P_2 liegend, folgende Bedingungen erfüllen muss: Zieht man durch die Punkte 0 und 3 des Kräftepolygons Linien parallel zu denen P_1 und P_3, so haben diese die Richtungen der ersten und dritten Seite im Kräftepolygon. Wenn folglich durch C die Strahlen C 1 und C 2 parallel mit den zu suchenden Seiten I II und II III des Seilpolygons gelegt und bis zu ihren Durchschnittspunkten 1 und 2 mit jenen Seiten verlängert werden, so muss die Verbindungslinie 1 2 dieser Schnittpunkte parallel zur Linie P_2 werden, auf welcher der Punkt II liegt. Dieser ist folglich leicht in folgender Weise zu erhalten. Denkt man sich die Kraft P_2 in zwei Componenten $P_{2'}$ und $P_{2''}$ zerlegt, deren Grösse, Richtung und Sinn im Kräftepolygon durch die Strecken 1 a und a 2 dargestellt ist, so kann man die eine derselben, $P_{2'}$, in die Linie P_1 fallen lassen; die andere, $P_{2''}$, muss aber dann in der Geraden $\beta\gamma$ liegen, welche durch den Durchschnittspunkt β von P_1 und P_2 parallel zu P_3 gezogen ist. Das Seilpolygon aus den vier Kräften P_1, $P_{2'}$, $P_{2''}$, P_3 gestaltet sich folglich so: die erste Seite bleibt die schon gezeichnete 0 I; die zweite Seite, zwischen P_1 und $P_{2'}$, wird Null, weil diese Kräfte in derselben geraden Linie liegen; die dritte Seite, zwischen $P_{2'}$ und $P_{2''}$, wird parallel zum Strahl a C und geht durch den Punkt I; sie kann also gezogen werden, in der Figur ist sie mit I γ bezeichnet. Die auf $P_{2''}$ folgende Seilpolygonseite ist aber nun dadurch auch bestimmt. Denn da die Gesammtresultante und folglich auch die letzte Seite III IV unverändert bleiben muss, so ist die Verbindungslinie des Punktes γ mit dem Punkte III jene Polygonseite. Werden nun wieder die Componenten $P_{2'}$ und $P_{2''}$ zur Kraft P_2 vereinigt, so müssen sich die beiden Polygonseiten, von denen die eine der Componente $P_{2'}$ vorausgeht, die andere der $P_{2''}$ nachfolgt, auf P_2 schneiden. Letztere, die Seite γ III, gibt folglich, wo nöthig verlängert, bis sie P_2 schneidet, den

gesuchten Punkt II, und wenn man die Strahlen C 1 und C 2 im Kräftepolygon parallel zu den Verbindungslinien I II und II III zieht, so schneiden sie auf 0 a und a 3 die Componenten 0 1 und 2 3 ab, während die Verbindungslinie 1 2 der Schnittpunkte die Componente P_2 gibt.

Von der Richtigkeit dieser Construction kann man sich auch auf rein geometrischem Wege leicht überzeugen. Denn eigentlich haben wir in den beiden vollständigen Vierecken C 1 a 2 und I $\beta\gamma$ II fünf Paar entsprechende Seiten bezw. parallel gemacht; die sechsten 1 2 und β II mussten es also von selbst werden. Das Polygon 0 1 2 3 gibt daher die Grösse und den Sinn der drei gesuchten Componenten.

Zur Durchführung obiger Construction ist der Schnittpunkt a der Seiten 0 1 und 3 2 des Kräftepolygons erforderlich. Wären diese beiden Seiten, also die Linien P_1 und P_3, parallel zu einander, wie es sein kann, da zwei von den drei Componenten in parallelen Linien liegen dürfen, so würde auch der Strahl C a parallel zu ihnen. Die durch den Durchschnittspunkt β von P_1 mit P_2 und durch den Punkt I bezw. parallel zu P_3 und zu jenem Strahl gezogenen Linien würden sich also nicht schneiden, sondern zusammenfallen, und der Punkt γ würde dadurch unbestimmt werden. Man müsste folglich einen anderen Weg zur Aufsuchung des Punktes II einschlagen, und es ist nicht schwer, einen solchen zu finden. Aber man wird immer besser thun, einen derartigen Ausnahmsfall wo möglich zu vermeiden, und dies kann man hier in der That. Man darf nur die Reihenfolge der Componenten so nehmen, dass die erste und dritte sich schneiden, darf also den Pol C nur so wählen, dass die Seilpolygonseiten 0 I und III IV, welche durch den beliebigen Punkt α der Resultante parallel zu den Strahlen 0 C und 3 C gezogen werden, zwei nicht zu einander parallele von den gegebenen drei Linien, in welche die Componenten fallen sollen, in den Punkten I und III schneiden (s. Fig. 13ᵃ und 13ᵇ Taf. III). Es fällt dann zwar der Scknittpunkt β der beiden Linien P_1 und P_2 in unendliche Entfernung und daher auch die zu P_3 parallele Linie $\beta\,\gamma$ und ihr Schnittpunkt γ mit der durch I zum Strahl a C parallel gezogenen Geraden; daraus folgt aber nur, dass die Verbindungslinie γ III auch parallel zur Linie I γ oder zum Strahl a C ist. Man hat also einfach durch den Punkt III eine Parallele zum Strahl a C im Kräftepolygon zu ziehen, um in ihrem Durchschnittspunkt mit der Linie P_2 den Eckpunkt II des Seilpolygons zu erhalten.

Da die Resultante der parallelen Kräfte P_1 und P_2 parallel zu ihnen durch den Schnittpunkt δ ihrer äusseren Seilpolygonseiten 0 I und II III gehen muss, aber auch durch den Punkt ε, in welchem die gegebene Resultante die Componente P_3 schneidet, so kann man die Seite II III und mit ihr den Punkt II noch einfacher erhalten. Man darf nur den Punkt δ, in welchem die durch ε parallel zu P_1 und P_2 gezogene Gerade die Polygonseite 0 I schneidet, mit dem Eckpunkt III verbinden. In der That wurden in den beiden vollständigen Vierecken a 3 C 0 und ε III $\alpha\,\delta$ fünf Paar entsprechende Seiten bezw. parallel zu einander gezogen, weshalb es auch die sechsten werden müssen.

Existirt freilich der Schnittpunkt ε nicht mehr, ist also P_3 parallel mit der gegebenen Resultante, was vorkommen kann (Fig. 14 Taf. III), so bleibt nichts übrig, als wie vorhin im Allgemeinen die Seite III II parallel mit dem Strahl a C im Kräftepolygon zu ziehen, der hier eben mit dem 0 C zusammenfällt, weil die Seite 3 2 in die 3 0 zu liegen kommt. Im Uebrigen ist die Auflösung in diesem speciellen Fall, wo also zwei der Componenten P_1 und P_2 unter sich parallel sind und die dritte mit der gegebenen Resultante, ganz so durchzuführen wie oben. Fig. 14 zeigt, dass die beiden Componenten, welche in die zu einander parallelen Geraden P_1 und P_2 fallen, nämlich 0 1 und 1 2, von gleicher Grösse sind, aber im entgegengesetzten Sinne wirken, also ein Gegenpaar bilden, und dass die dritte Componente 2 3 an Grösse, Richtung und Sinn mit der Resultante übereinstimmt. Dies folgt schon unmittelbar aus den Betrachtungen im § 26.

3. Die Aufgabe, eine gegebene Kraft in vier oder mehr Componenten, die alle mit ihr in einer Ebene gelegen sind, zu zerlegen, ist, wenn nicht unmöglich, jedenfalls unbestimmt.

§ **37.** Die Aufgabe, welche im vorigen § behandelt wurde, kann auch in anderer Form gestellt werden, nämlich: die Kräfte zu suchen, welche einer gegebenen Kraft das Gleichgewicht halten, oder einem Systeme von Kräften, von dem jene gegebene Kraft Resultante ist. Bezüglich der Möglichkeit, Bestimmtheit oder Unmöglichkeit der Auflösung dieser Aufgabe gelten ganz dieselben Betrachtungen, wie sie im vorigen Paragraphen angestellt worden sind. Das Resultat der Lösung erhält man einfach dadurch, dass man entweder den Sinn der dort als gegeben betrachteten Kraft umkehrt, oder den der dort gefundenen Componenten. Die Construction bleibt genau die gleiche, doch ist es dem Anfänger dringend zu rathen, sie in dieser anderen Form nochmals durchzumachen.

§ **38. Unfreies Gleichgewicht.** — Wenn wir bisher von dem Gleichgewicht von Kräften an einem Körper sprachen, so dachten wir uns denselben immer ganz frei, so dass er den Wirkungen der an ihm thätigen Kräfte ungehindert nach allen Seiten hin folgen könnte, wenn diese nicht im Gleichgewicht wären. Solche Körper kommen aber in den Anwendungen fast nie vor; sie sind beinahe immer an einem oder an mehreren Punkten, *Fixpunkten*, befestigt, oder stützen sich an einer oder an mehreren Stellen, *Stützpunkten*, gegen die Oberflächen anderer, fester Körper, die selber als unverrückbar, unbeweglich angesehen werden. Natürlich haben die auf solche Körper wirkenden Kräfte andere, unter Umständen gar keine Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen; dabei werden sie gewisse Einwirkungen auf jene Fix- und Stützpunkte hervorrufen, welchen diese widerstehen können, und denen sie nach dem Princip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gleichgrosse und in derselben geraden Linie entgegengesetzte Reactionen entgegenstellen müssen. Jene Gleichgewichtsbedingungen und diese Wirkungen auf die Fix- und Stützpunkte, oder die Reactionen dieser, kennen zu lernen, wollen wir uns nun zur Aufgabe stellen. Dabei setzen wir hier, wo wir nur von Kräften in einer und derselben Ebene sprechen, voraus, dass die Fix- und Stützpunkte in derselben Ebene gelegen seien, und dass sich letztere auf festen Curven, den Schnittlinien der Ebene mit den Oberflächen der stützenden Körper, befinden.

Ist nur ein einziger *Fixpunkt* vorhanden, um den sich der Körper zwar drehen kann, der aber selbst unbeweglich ist, nach allen Seiten hin, so reicht es für das Gleichgewicht der auf den Körper wirkenden Kräfte offenbar aus, dass die Resultante durch diesen Punkt hindurchgeht. Zieht man also die erste Seite des Seilpolygons, deren Lage ja beliebig angenommen werden darf, durch den Fixpunkt, so muss auch die letzte durch denselben hindurchgehen; Grösse, Richtung und Sinn der Resultante ist gleichgültig, das Kräftepolygon hat also keinerlei Bedingung zu befriedigen. Diese Resultante ist dann zugleich die Einwirkung, welche der Fixpunkt erleidet, und eine ihr gleiche und in derselben geraden Linie entgegengesetzte Kraft die Reaction, die der Fixpunkt ausübt. Unter der Wirkung dieser Reaction und der gegebenen Kräfte befindet sich der Körper im freien Gleichgewicht.

Wenn statt des Fixpunktes ein *Stützpunkt* vorhanden ist, so reichen obige Bedingungen nicht aus; ein solcher Punkt kann unter der Wirkung der durch ihn hindurchgehenden Resultante auf der Curve, gegen welche er sich stützt, abgleiten. Nur wenn die Resultante *normal gegen* jene Curve gerichtet ist, kann das nicht stattfinden. Damit also ein Körper mit einem Stützpunkt im Gleichgewicht ist, muss die Schlusslinie des Kräftepolygons aus den auf ihn wirkenden Kräften normal zu der Stützcurve sein und solchen Sinn haben, dass sie den Stützpunkt gegen dieselbe andrückt; ausserdem muss die letzte Seite des Seilpolygons, dessen erste Seite durch den Stützpunkt gelegt wurde, ebenfalls durch denselben hindurchgehen. Die so bestimmte Resultante ist wieder die Einwirkung auf den Stützpunkt und eine ihr gleiche und in derselben geraden Linie entgegengesetzte Kraft dessen Reaction. Letztere hält den Körper, zusammen mit den ursprünglich gegebenen Kräften, im freien Gleichgewicht.

Mit zwei Fixpunkten ist der Körper schon ganz fest. Die auf ihn wirkenden Kräfte brauchen gar keine Bedingungen zu erfüllen, der Körper bleibt immer unbeweglich, wenn nur die Fixpunkte den auf sie ausgeübten Einwirkungen genügend widerstehen. Diese Einwirkungen aber können selber nicht mehr bestimmt werden. Man weiss von ihnen nur, dass sie Componenten der Resultante der Kräfte sein müssen, die auf den Körper wirken. Um sie zu erhalten, muss man also jene Resultante in zwei Componenten zerlegen, welche durch die beiden gegebenen Fixpunkte hindurchgehen, und das ist eine unbestimmte Aufgabe.

Wenn aber der Körper statt zweier Fixpunkte zwei Stützpunkte auf zwei Stützlinien hat, so müssen die Einwirkungen, welche dieselben zu erleiden haben, normal gegen die Stützlinien gerichtet sein. Von den beiden Componenten, in welche die Resultante der gegebenen Kräfte zerlegt werden muss, ist folglich Richtung und Lage, nämlich die der Normalen an die Stützlinien in den gegebenen Stützpunkten, vorgeschrieben, sowie auch ihr Sinn. Jene Resultante muss folglich durch den Schnittpunkt der beiden Normalen hindurchgehen. Ihre Richtung ist gleichgültig, jedoch nur innerhalb gewisser Grenzen: die Componenten, in welche sie nach den Richtungen der Normalen zerlegt werden kann, müssen solchen Sinn erhalten, dass sie die Stützpunkte gegen die Stützlinien andrücken. — Damit also Kräfte einen Körper mit Hülfe zweier Stützpunkte im Gleichgewicht halten, muss die letzte Seite des Seilpolygons derselben, dessen erste durch den Schnittpunkt der Normalen der Stützlinien, errichtet in den Stützpunkten, geht, ebenfalls durch diesen Schnittpunkt gehen. Das Kräftepolygon hat keine Bedingung zu erfüllen; nur muss Richtung und Sinn der dadurch bestimmten Resultante derart sein, dass letztere, wenn sie im Schnittpunkt der Normalen wirkend gedacht und nach denselben zerlegt wird, Componenten gibt, welche die Stützpunkte gegen die Stützlinien andrücken. Diese Componenten sind dann wieder die, hier völlig bestimmten Einwirkungen, welche die Stützpunkte zu erleiden haben; die ihnen gleichen und in denselben Normalen entgegengesetzten Kräfte sind die Reactionen der Stützpunkte, kurz Auflagerreactionen genannt, welche den Körper mit den auf ihn wirkenden, gegebenen Kräften im freien Gleichgewicht halten.

Wenn die Normalen auf die Stützlinien, in den Stützpunkten errichtet, parallel zu einander sind, so muss die Resultante der gegebenen Kräfte ebenfalls parallel zu ihnen sein; dagegen ist jetzt ihre Lage beliebig. Das Kräftepolygon muss also eine zu den Normalen parallele Schlusslinie haben; das Seilpolygon unterliegt keiner Bedingung, nur müssen wieder die beiden in den Normalen liegenden Componenten, welche man durch Zerlegung jener Resultante erhält, die Stützpunkte gegen die Stützlinien andrücken.

Ersetzt man einen der Stützpunkte des vorigen Falles durch einen Fixpunkt, hat also der Körper einen Fix- und einen Stützpunkt, so darf die durch ersteren gehende Componente jede beliebige Richtung haben. Welches also auch die Resultante der gegebenen Kräfte sein mag, man kann sie stets an den Schnittpunkt der Normalen zur Stützlinie mit ihr verlegen und dort in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine in der Normalen liegt, die andere in der Verbindungslinie jenes Schnittpunktes mit dem Fixpunkte. Es hat also weder das Kräfte-, noch das Seilpolygon der gegebenen Kräfte Bedingungen zu erfüllen. Die durch sie gefundene Resultante der gegebenen Kräfte kann in ganz bestimmter Weise in zwei Componenten, die Einwirkungen auf den Fix- und Stützpunkt, zerlegt werden; dabei muss nur wieder die Einwirkung auf den Stützpunkt einen solchen Sinn haben, dass derselbe gegen die Stützlinie angedrückt wird. — Diese Einwirkungen, in denselben geraden Linien entgegengesetzt und von gleicher Grösse genommen, halten zusammen mit den gegebenen Kräften den Körper wieder im freien Gleichgewicht.

Wenn der Körper, auf den gegebene Kräfte einwirken, sich in drei Stützpunkten gegen Auflager stützt, so müssen die daselbst stattfindenden Einwirkungen die Richtungen der Normalen haben und zugleich die Componenten der Resultante der gegebenen Kräfte sein. Die Zerlegung

einer Kraft aber in drei Componenten, die in drei gegebenen Linien liegen, ist unter den in § 36 Nr. 2 angegebenen Umständen eine mögliche und bestimmte Aufgabe. Wie also auch die Resultante der auf den Körper einwirkenden Kräfte sein mag, wenn sich nur die drei Normalen in den Stützpunkten in drei verschiedenen Punkten schneiden, von denen keiner auf der Resultante gelegen ist, oder wenn nur für den Fall, dass zwei davon parallel zu einander sind, dieselben nicht zugleich zur Resultante parallel laufen und von der dritten Normalen geschnitten werden, so ist die Zerlegung der Resultante in drei normal gegen die Stützlinien gerichtete Componenten immer möglich und bestimmt; und wenn diese Einwirkungen alle den Sinn haben, dass sie die Stützpunkte gegen die Auflager andrücken, so befindet sich der Körper immer im Gleichgewicht, ohne dass Kräfte- und Seilpolygon der an ihm thätigen Kräfte besondere Bedingungen zu befriedigen hätten. Die in den Normalen wirkenden Auflager-Reactionen, welche jenen Componenten gleich und entgegengesetzt sind, halten den Körper mit den an ihm wirkenden gegebenen Kräften im freien Gleichgewicht; sie könnten daher auch direct auf dem im § 37 angegebenen Wege gefunden werden.

Schon in dem Falle, wo der Körper zwei Fixpunkte hatte, war sein Gleichgewicht unter allen Umständen gesichert und die Aufgabe, die Einwirkung auf die Fixpunkte zu finden, eine unbestimmte. Dies bleibt so und findet in erhöhtem Masse statt, wenn in den verschiedenen, oben durchgenommenen Fällen die Zahl der Fix- oder Stützpunkte vergrössert wird. Der Körper ist dann stets im Gleichgewicht und die Vertheilung der Einwirkungen auf jene Punkte hängt von rein zufälligen, der Rechnung oder Construction unzugänglichen Umständen ab, vorausgesetzt, dass sowohl der Körper, auf den die Kräfte wirken, als auch diejenigen, auf denen sich die Fix- und Stützpunkte befinden, vollkommen starr, d. h. von unveränderlicher Gestalt sind, was bisher immer stillschweigend angenommen wurde. Wenn aber Körper und Auflager nachgiebig, elastisch sind, wie das in Wirklichkeit stets der Fall ist, dann werden auch in diesen letzten Fällen die Einwirkungen auf die Fix- und Stützpunkte wieder vollkommen bestimmt; ihre Auffindung freilich erfordert dann Untersuchungen, auf welche hier nicht näher eingegangen werden kann.

§ 39. Erstes Beispiel: Graphische Bestimmung der Auflagerdrucke oder Auflagerreactionen eines auf zwei Unterstützungspunkten horizontal und frei aufliegenden Balkens. — Ein horizontaler prismatischer Balken liege frei auf zwei Stützpunkten A und B (Fig. 15 Taf. IV) und werde von vertical abwärts gerichteten Kräften oder Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 angegriffen, die mit den Stützpunkten in einer und derselben Verticalebene gelegen sind. Die Normalen in den Stützpunkten sind hier offenbar ebenfalls verticale, also parallele Linien; die Resultante der gegebenen Kräfte muss also auch vertical sein, was sie von selbst wird; sie muss ausserdem, damit die Einwirkungen an den Stützpunkten den Balken gegen diese andrücken, zwischen A und B liegen, eine Bedingung, die in vorliegendem Fall auch von selber erfüllt ist.

Die gegebenen Kräfte seien in Fig. 15^a in das Kräftepolygon 0 1 2 3 4 zusammengetragen, dessen Pol C beliebig gewählt werden kann. Für denselben ist in Fig. 15^b das Seilpolygon 0 I II III IV V gezeichnet. Durch den Durchschnittspunkt α der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und IV V geht die Resultante der vier Kräfte hindurch, deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Strecke 0 4 im Kräftepolygon dargestellt ist. Zerlegt man diese Resultante in zwei Componenten, die in den Verticallinien liegen, welche durch die Stützpunkte A und B hindurchgehen, so sind diese Componenten die Einwirkungen, welche der Balken auf die Unterstützungspunkte ausübt. Sie sind leicht zu erhalten. Man verbindet die Punkte 0 und V, in welchen die äussersten Seilpolygonseiten die durch A und B gezogenen Verticallinien schneiden, mit einander und zieht durch den Pol des Kräftepolygons eine Parallele zu dieser Verbindungslinie, bis die Kräftelinie in T geschnitten wird. Die Abschnitte 0 T und T 4, in welche dieser Punkt die Resultante 0 4 theilt, stellen der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach die gesuchten Componenten derselben, folglich die Einwirkungen auf die Unterstützungspunkte dar. Bringt man diese Einwirkungen im entgegengesetzten Sinne an

dem Balken in den Punkten an, wo er die Auflager berührt, so stellen sie die Gegenwirkungen vor, welche der Balken an den Stützpunkten erfährt, die sog. Auflagerreactionen, die wir mit A und B bezeichnen, und deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Abschnitte T 0 und 4 T gegeben ist. Der Balken befindet sich dann unter dem Einfluss der sechs Kräfte A, P_1, P_2, P_3, P_4, B im freien Gleichgewicht, und in der That schliesst sich sowohl das Kräftepolygon T 0 1 2 3 4 T, als auch das Seilpolygon 0 I II III IV V 0 aus jenen sechs Kräften.

Für die Anwendung der Sätze aus der Elasticitäts- und Festigkeitslehre auf den Balken ist es von Wichtigkeit, für jedes der beiden Stücke A y und y B, in welche irgend ein Querschnitt y den Balken theilt, die Resultante der sämmtlichen auf dasselbe einwirkenden Kräfte (einschliesslich der Auflagerreactionen) zu finden. Lässt man die Kräfte in der Ordnung A, P_1, P_2, P_3, P_4, B auf einander folgen, und hat man im Auge, dass V 0 sowohl die der ersten Kraft A vorangehende, als auch die der letzten Kraft B nachfolgende Seilpolygonseite ist, so ergibt sich sofort, dass die Resultante der auf den links liegenden Theil A y des Balkens wirkenden Kräfte, im Falle unserer Figur der Kräfte A, P_1, P_2 und P_3, der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach durch die Strecke T 3 vorgestellt ist und durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten 0 V und III IV hindurchgeht. Wären diese letzteren parallel, so wäre die Strecke T 3 Null, weil die Linie C T mit dem Strahl C 3 zusammengefallen wäre, und die Zusammensetzung der Kräfte A, P_1, P_2, P_3 würde ein Gegenpaar ergeben, dessen Kräfte, in 0 V und III IV liegend, durch die beiden zusammenfallenden Strahlen T C und bezw. C 3 der Grösse, Richtung und dem Sinne nach dargestellt werden würden. — Die Resultante der auf das rechts gelegene Stück y B wirkenden Kräfte P_4 und B ist durch die Strecke 3 T repräsentirt und geht gleichfalls durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten III IV und V 0 hindurch; sie ist also der vorigen gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt, wie sich von vorn herein schon von selbst versteht. — Die grössten Werthe für jene Resultante erhält man offenbar für die Querschnitte über den Auflagerpunkten A und B; diese Werthe sind T 0 und bezw. T 4.

§ 40. Zweites Beispiel: Graphische Bestimmung der Spannungen in den Constructionstheilen eines eisernen Dachstuhles (Fachwerkträgers). — Als zweites Beispiel für die im gegenwärtigen Abschnitt gelehrte Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in einer Ebene haben wir in Fig. 16 Taf. IV einen Querträger A B g eines eisernen Dachstuhles gewählt, der mit seinen in horizontaler Linie liegenden Enden A, B frei auf Stützen liegt. Er ist in Fig. 16[b] nur zur Hälfte gezeichnet, da er um die Mittellinie g h symmetrisch angeordnet sein soll. Der Träger ist als Fachwerk construirt, d. h. er kann aus einzelnen geradlinigen Constructionstheilen A a, A b, a b etc. bestehend gedacht werden, die mit ihren Endpunkten so an einander befestigt sind, dass nur einfache (ihrer Länge nach wirkende) Zug- oder Druckspannungen in ihnen hervorgerufen werden können, dass sie also nicht auf Biegung beansprucht werden. Die von aussen auf den Träger wirkenden Kräfte, sein eigenes Gewicht, das der Bedachung, den Schneedruck etc., denken wir uns auf die oberen Knotenpunkte A, a, c, e, g ... vertheilt, wo sie die Grössen P_1, P_2, P_3 ... haben mögen. Dann stellen wir uns die Aufgaben:

1. Jene parallelen, vertical abwärts gerichteten Kräfte in eine Resultante zu vereinigen;
2. diese Resultante in zwei Componenten zu zerlegen, welche in den durch die Auflagerpunkte A, B gezogenen Verticalen liegen und daher die Auflagerdrücke repräsentiren;
3. die in den einzelnen Constructionstheilen wirkenden Zug- oder Druckspannungen zu finden.

Behufs Auflösung der ersten Aufgabe bilden wir aus den Kräften P_1, P_2 .... das Kräftepolygon 0 1 2 3 ... in Fig. 16[a]. Den Pol C desselben nehmen wir, unter Voraussetzung, dass die Kräfte P auch ihrer Grösse nach symmetrisch um die Mittellinie g h vertheilt sind, in der Senkrechten 𝔄 C an, welche in der Mitte der mittleren Kraft P_5 oder 4 5 auf dem Kräftezug 0 9 errichtet ist. Dann ordnet sich auch das Seilpolygon 0 I II .... symmetrisch um die Mittellinie g h an. Die erste

Seite 0 I desselben, welche parallel zum Strahl 0 C ist, lassen wir gleich durch den Stützpunkt A gehen; dann gehen auch seine vorletzte und letzte Seite VIII IX und IX X durch den Stützpunkt B. Sie sind in Fig. 16[b] nicht mehr gezeichnet, aber der Symmetrie wegen leicht in Gedanken zu ergänzen. Man darf sich nur den rechtsseitigen Theil des Trägers um g h auf den linken herübergeschlagen denken.

Die Grösse, Richtung und den Sinn der Resultante der Kräfte P_1, P_2...... P_9 gibt die Strecke 0 9 im Kräftepolygon, das ebenfalls in Gedanken leicht ergänzt werden kann. Ihre Lage ist dadurch bestimmt, dass sie durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten 0 I und IX X hindurchgehen muss. Dieser liegt natürlich in der Mittellinie g h, in welche also auch die Resultante fällt.

Um die Resultante P_{1-9} in zwei zu ihr parallele Componenten zu zerlegen, welche in den durch die Stützpunkte A, B gezogenen Verticallinien liegen, verbinden wir die Schnittpunkte der äussersten Seilpolygonseiten mit diesen Verticallinien, also die Punkte A, B selbst mit einander. Die Verbindungslinie ist horizontal und die zu ihr parallel durch den Pol C gezogene Theilungslinie keine andere als die vorhin senkrecht auf dem Kräftezug errichtete 𝔄 C. 0 𝔄 und 𝔄 9 stellen also die Auflagerdrücke A_0 und B_0 vor. Die ihnen gleichen aber im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte 𝔄 0 und 9 𝔄 repräsentiren folglich die Gegenwirkungen, welche der Träger in den Unterstützungspunkten A und B von Seite dieser erfährt, die sog. Auflagerreactionen P_0 und bezw. $P_{0'}$.

Denkt man sich diese Auflagerreactionen an dem Träger angebracht, so befindet sich derselbe unter ihrem und dem Einflusse der Kräfte P_1, P_2...... P_9 im freien Gleichgewicht. In der That schliesst sich das Kräftepolygon 𝔄 0 1 2 3.... 8 9 𝔄 aus ihnen und ebenso das Seilpolygon B A 0 I II...... IX X B. Es ist nun leicht, das Verfahren anzugeben, durch welches man zur Kenntniss der Spannungen in den einzelnen Constructionstheilen gelangen kann. Denn jenes Gleichgewicht der Kräfte P_0, $P_{0'}$, P_1, P_2...... P_9 kann nur durch Vermittlung dieser Spannungen zu Stande kommen. Denken wir uns also den Träger durch einen irgendwie geführten Schnitt in zwei Theile getrennt, so wirken die an dem einen, abgeschnittenen Theil thätigen äusseren Kräfte nur durch Vermittlung der Spannungen in den durchschnittenen Constructionstheilen auf den anderen übrig bleibenden Theil. Diese Spannungen, als Einwirkungen des abgeschnittenen auf den anderen Theil gedacht, sind folglich den an ersterem wirkenden, äusseren Kräften äquivalent, oder die Componenten der Resultante aus diesen letzteren Kräften. Da die Spannungen aber bloss Zug- oder Druckspannungen sein können, da sie also nur in der Längsrichtung der Constructionstheile, denen sie angehören, wirken können, so ist ihre Lage und Richtung vorgeschrieben, und wir stehen also wieder an der im § 36 behandelten Aufgabe, eine gegebene Resultante in Componenten zu zerlegen, deren Lage und Richtung vorgeschrieben ist. Diese Aufgabe ist eine mögliche und völlig bestimmte dann, wenn bloss zwei Constructionstheile durchschnitten sind, deren Durchschnittspunkt auf der Resultante liegt, oder wenn drei Constructionstheile von dem Schnitt getroffen werden und keiner der Punkte, in welchen sie sich selbst unter einander schneiden, auf die Resultante fällt, etc. Wenn mehr als drei Constructionstheile durchschnitten sind, so ist die Aufgabe unbestimmt, vorausgesetzt, dass nicht die Spannungen in einigen derselben schon anderweitig gefunden werden können, und so doch zuletzt nur höchstens drei unbekannte Spannungen übrig bleiben.

In unserem Beispiel kann ein Schnitt so geführt werden, dass bloss zwei Constructionstheile, nämlich A a und A b, getroffen werden. Ausserdem kann man auch Schnitte machen, deren jeder drei, vier und mehr Constructionstheile zugleich trifft. Doch ist sehr leicht zu sehen, dass sämmtliche Constructionstheile unseres Trägers durchschnitten werden können, ohne dass im Ganzen mehr als drei Constructionstheile durch jeden Schnitt getroffen werden. Unsere Aufgabe, die Spannungen in den einzelnen Bestandtheilen des Trägers kennen zu lernen, ist daher eine mögliche und völlig bestimmte. Sie kann sogar so gelöst werden, dass für jeden Schnitt nur zwei unbekannte Spannungen

Wenn also eine gegebene Kraft P'' parallel mit sich selbst ohne Aenderung ihrer Grösse, ihrer Richtung und ihres Sinnes so verlegt wird, dass sie durch einen gegebenen Punkt A hindurch geht, dann hat man zur verschobenen Kraft P ein Gegenpaar hinzuzunehmen, dessen charakteristisches Dreieck als Grundlinie die ursprüngliche Kraft AP'' und als gegenüberliegende Spitze den Punkt A hat. Die Drehrichtung des Gegenpaars ist durch den Kreispfeil gegeben, der im Sinne der ursprünglichen Kraft in dieses Dreieck gezeichnet wird.

Es ist leicht einzusehen, von welcher Bedeutung die eben behandelte Zerlegungsart für die Zusammensetzung beliebiger Kräfte, in einer Ebene oder im Raume gelegen, werden kann. Es können auf diese Weise alle gegebenen Kräfte parallel mit sich selbst verschoben werden, bis sie durch einen und denselben Punkt, der dann als ihr gemeinschaftlicher Angriffspunkt angenommen werden kann, hindurchgehen. An demselben können sie dann mittelst des Kräftepolygons in jedem Falle zu einer Resultante vereinigt werden, wenn sie sich nicht an ihm das Gleichgewicht halten. Freilich bleiben dann noch ebensoviele Gegenpaare übrig, als Kräfte gegeben waren. Diese liegen alle in einer Ebene, wenn dies bei den gegebenen Kräften auch der Fall war und der gemeinschaftliche Angriffspunkt in der Ebene der Kräfte genommen wurde. Sie liegen aber in verschiedenen, sich schneidenden Ebenen, wenn die gegebenen Kräfte und der angenommene gemeinschaftliche Angriffspunkt der verschobenen beliebige Lagen im Raume haben. Es bleibt dann noch die Frage zu erörtern, ob und wie solche Gegenpaare mit einander vereinigt werden können? Die Beantwortung dieser Frage wird im Verlaufe des nächsten Abschnitts gegeben werden.

V. Abschnitt.

Von den Drehungsmomenten der Kräfte.

§ 42. Definition, graphische Bedeutung und Ausmessung der Drehungsmomente um Punkte. — Man nennt das Product aus einer Kraft in ihre senkrechte Entfernung von einem Punkte das Drehungsmoment der Kraft um diesen Punkt, den Punkt selbst den Momentenpunkt und seine senkrechte Entfernung von der Kraft den Hebelarm derselben. Da die Kräfte in Gewichtseinheiten, Entfernungen in Längeneinheiten gemessen werden, so gibt man jenem Producte eine Benennung, welche aus denen der Gewichtseinheit und der Längeneinheit zusammengesetzt ist. Für den Fall also, dass die Längeneinheit der Meter und die Gewichtseinheit das Kilogramm ist, erhalten die Drehungsmomente die Bezeichnung Meter-Kilogramm (abgek. mkg). Die Einheit der Momente ist also dasjenige Drehungsmoment, welches die Krafteinheit besitzt, die in einer Entfernung gleich der Längeneinheit vom Momentenpunkte liegt.

Fig. 31.

Wird die Kraft graphisch durch eine begrenzte gerade Linie $A_1 P_1$ (Fig. 31) vorgestellt, so hat auch ihr Drehungsmoment um den Punkt O eine graphische Bedeutung: es ist der doppelte Flächeninhalt des Dreieks $A_1 P_1 O$, dessen Grundlinie die Kraft und dessen Spitze der Momentenpunkt O ist. Dieser Flächeninhalt bleibt ungeändert, wenn die Kraft in der Linie, in welcher sie wirkt, beliebig verschoben wird; das Dreieck $A_1 P_1 O$ ist an Flächeninhalt gleich dem $A'_1 P'_1 O$.

Wird der Flächeninhalt, der ein Drehungsmoment repräsentirt, einer Zeichnung entnommen, welche bezüglich der Längen und Kräfte in einem bestimmten Massstabe hergestellt wurde, und bezeichnet f diesen Flächeninhalt in seiner wirklichen, unmittelbar der Figur entnommenen Grösse, so erhält man daraus in folgender Weise das Drehungsmoment, in der oben bezeichneten Einheit ausgedrückt: Seien der Längen- und der Kräftemassstab der Zeichnung der Art, dass die Längeneinheit, welche bei der Bezeichnung der Fläche f zu Grunde liegt (z. B. 1 Centimeter, wenn f in Quadratcentimetern ausgedrückt ist), a solcher Längeneinheiten und b solcher Krafteinheiten repräsentirt, wie sie bei der Momenteneinheit gebraucht werden (z. B. 1 Centimeter der Zeichnung gleich 2 Meter und bezw. gleich 10 Kilogramm in Wirklichkeit, wenn die Momente in Meter-Kilogrammen gemessen werden), so repräsentirt die Einheit, in welcher die Fläche f ausgedrückt ist (1 Quadratcentimeter), a b Momenteneinheiten (20 Meter-Kilogramm). Die Fläche f selbst also bedeutet a b f Momenteneinheiten.

Aus diesem Falle lassen sich zwei andere ableiten, von denen wenigstens der erste in der Praxis sehr häufig vorkommt. Wird der Flächeninhalt, der ein Moment repräsentirt, sofort unter Berücksichtigung des Längenmassstabes der Figur in der Quadrateinheit ausgedrückt, welche der bei der Momenteneinheit zu Grunde gelegten Längeneinheit entspricht (also in Quadratmetern, um bei

obigem Beispiel stehen zu bleiben), so ist die Zahl F, durch welche dies geschieht, unter Beibehaltung obiger Bezeichnung gleich $a^2 f$, und man erhält folglich aus ihr das Moment, ausgedrückt in Momenteneinheiten, als $a b f = a b \frac{F}{a^2} = \frac{b}{a} F$. — Wird dagegen derselbe Flächeninhalt unter Zugrundelegung des Kräftemassstabes der Figur als F' ausgedrückt, so ist $F' = b^2 f$ und daher das Moment gleich $a b f = a b \frac{F'}{b^2} = \frac{a}{b} F'$ Momenteneinheiten.

Beispiel: In Fig. 16 Taf. IV ist, wie im § 40 bemerkt, der Längen- und Kräftemassstab so gewählt, dass 1^{cm} gleich 2^{m} und bezw. gleich 4000^{kg} ist. Wird daher in dieser Figur ein Moment durch eine Fläche repräsentirt, welche in der natürlichen Grösse der Figur 10 Quadratcentimeter umfasst, so ist jenes Moment gleich 80 000 Meter-Kilogramm. Hätte man jene Fläche unter Berücksichtigung des Längenmassstabes der Figur in Quadratmetern ausgedrückt, so hätte man 40 solcher Flächeneinheiten dafür erhalten, und dieselben würden $\frac{4000}{2} \times 40 = 80000$ Meter-Kilogramm repräsentirt haben. Im Kräftemassstabe würde man für dieselbe Fläche 160 000 000 gefunden haben, und diese Zahl hätte wieder $\frac{2}{4000} \times 160000000 = 80000$ Meter-Kilogramm für das ausgemessene Moment ergeben.

§ 43. **Reduction der Drehungsmomente auf eine gemeinschaftliche Basis.** — Für ein consequent durchgeführtes graphisches Verfahren ist es offenbar wünschenswerth, die Drehungsmomente von Kräften, welche sich nach vorigem § zunächst als Flächen ergeben, auch als Linien aus der betr. Zeichnung abgreifen und sofort auf einem Massstab messen zu können. Dies ist in der That leicht zu erreichen. Man darf nur alle Flächen, welche Momente repräsentiren, in Rechtecke verwandeln, die gleiche Grundlinie haben. Ist dann diese Grundlinie, auf dem Längenmassstabe gemessen, gleich l solcher Einheiten, wie sie bei der Momenteneinheit zu Grunde gelegt werden, dann gibt die Höhe des Rechtecks, auf dem Kräftemassstab abgegriffen, das Moment, vorausgesetzt, dass man jede solche Einheit des Kräftemassstabes, welche bei der Momenteneinheit zu Grunde liegt, als l Momenteneinheiten auffässt. Wenn aber die gemeinschaftliche Grundlinie der Rechtecke gleich k Krafteinheiten gemacht wird, dann gibt die Höhe, auf dem Längenmassstabe gemessen, das Moment, vorausgesetzt, dass jede Einheit dieses Massstabes k Momenteneinheiten gleichgesetzt wird.

In beiden Fällen sagt man, die Momente seien auf eine gemeinschaftliche Basis, Momentenbasis, reducirt worden. Es versteht sich von selbst, dass man dieselbe da, wo es geschehen kann, so annimmt, dass die Uebertragung vom Kräfte- oder Längenmassstab auf die Momenteneinheit möglichst einfach wird. Dies ist der Fall, wenn die Momentenbasis entweder gleich der Längen- oder Krafteinheit, welche der Momenteneinheit zu Grunde liegen, genommen wird, oder einer runden Anzahl derselben. Im ersteren Falle gibt die Höhe des betreffenden Rechtecks auf dem Kräfte- bezw. Längenmassstabe und ebenfalls in der Einheit gemessen, welche der Momenteneinheit zu Grunde liegt, unmittelbar das Moment. Wird in dem Beispiele am Ende des vorigen § (Fig. 16 Taf. IV) als Momentenbasis, gemessen auf dem Längenmassstabe ($1^{cm} = 2^{m}$), eine Länge von 10^{m} angenommen, so repräsentirt auf dem Kräftemassstabe ($1^{cm} = 4000^{kg}$) je 1^{kg} 10^{mkg} Momente (also $1^{cm} = 40000^{mkg}$). Würde aber jene Basis auf dem Kräftemassstab gemessen und folglich gleich 20000^{kg} gefunden, so würde, auf dem Längenmassstabe abgegriffen, jeder Meter Höhe (also $\frac{1}{2}{}^{cm}$) 20000^{mkg} repräsentiren. Ueberhaupt, misst die Momentenbasis, auf dem Längen- oder Kräftemassstab abgegriffen, a Einheiten und das auf sie reducirte Moment bezw. auf dem Kräfte- oder Längenmassstab m Einheiten, so ist das Moment selbst gleich a m solcher Einheiten, welche aus obigen beiden zusammengesetzt sind.

§ 44. Die Reduction der Momente auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis ist aber graphisch sehr leicht zu bewerkstelligen. Wie in § 42 gezeigt, erhält man das Drehungsmoment einer Kraft unmittelbar als Flächeninhalt eines Dreiecks. Man darf also nur dieses in ein anderes

von gleichem Flächeninhalte verwandeln, dessen Grundlinie gleich der Momentenbasis ist; die Höhe des neuen Dreiecks, so gemessen wie im vorigen § gezeigt, gibt dann unmittelbar das Moment. Jene Verwandlung kann aber in ganz allgemeiner Weise so bewerkstelligt werden: Man durchschneidet in dem zu verwandelnden Dreieck ABC (Fig. 32) von irgend einer Ecke A aus die gegenüberliegende Grundlinie mit einem Radius gleich der Momentenbasis in D, zieht AD und parallel dazu durch einen der Endpunkte der Grundlinie die Linie BN; die vom anderen Endpunkte C auf diese letztere Linie gefällte Senkrechte CE ist die Höhe des verwandelten Dreiecks, dessen Grundlinie AD ist. In der That ist $AD \times CE = AD \times (CF + FE) = 2 \triangle ADC + 2 \triangle ADB = 2 \triangle ABC$.

Fig. 32.

Die Möglichkeit obiger Construction wird dadurch bedingt, dass der senkrechte Abstand der Ecke A von der gegenüberliegenden Grundlinie kleiner ist als die Momentenbasis AD; dies kann aber, wenn es nicht der Fall sein sollte, leicht herbeigeführt werden. Man darf nur eine der von A ausgehenden Seiten, AB z. B., unter Festhaltung der gegenüberliegenden Ecke C, in der Linie, in welcher sie liegt, verschieben; dadurch wird der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht geändert, der Punkt A kann aber der gegenüberliegenden Seite so nahe gebracht werden, als man will.

Die Höhe CE kann auch als Projection der Grundlinie BC auf eine zur Geraden AD senkrechte Linie aufgefasst werden. Man nennt sie dann kürzer die *Antiprojection* der Grundlinie BC auf die Linie AD. Unter Benützung dieser Bezeichnung kann man die Regel für die Verwandlung eines Momentendreiecks auch so aussprechen: *Man durchschneidet von einer Ecke desselben aus mit einem Radius gleich der Momentenbasis die gegenüberliegende Grundlinie und zieht die Verbindungslinie dieser Ecke mit dem erhaltenen Schnittpunkt. Die Antiprojection der Grundlinie auf diese Verbindungslinie ist dann die Höhe des verwandelten Dreiecks und repräsentirt also das Moment.*

§ 45. Drei Methoden, um das Drehungsmoment einer Kraft auf eine gegebene Basis zu reduciren. — Wenden wir nun diese Construction auf die Reduction des Drehungsmomentes einer Kraft AP (Fig. 33) um den Momentenpunkt O, also auf die Verwandlung des Momentendreiecks APO an. Dann bieten sich offenbar zwei Wege dar, die man einschlagen kann: man nimmt entweder den Momentenpunkt O, oder einen der Endpunkte der Kraft AP als den Mittelpunkt an, von dem aus man die gegenüberliegende Dreieckseite mit einem Radius gleich der Momentenbasis durchschneidet.

Fig. 33.

1. Bei Verfolgung des ersten Weges muss die Momentenbasis H, mit welcher man vom Momentenpunkt O aus die gegenüberliegende Grundlinie zu durchschneiden hat, grösser genommen werden als die senkrechte Entfernung des Momentenpunktes von der Kraft AP. Denn berücksichtigt man die mechanische Bedeutung der Seiten des Dreiecks APO, so darf nur AP in der Linie, in welcher sie liegt, beliebig verschoben werden. Dadurch aber wird der senkrechte Abstand des Punktes O von ihr nicht geändert. Durchschneidet die Momentenbasis H von O aus die Linie, in welcher die Kraft liegt, in D, so ist die Antiprojection PE oder h der Kraft AP auf die Verbindungslinie OD das reducirte Moment. Ist also z. B. die Momentenbasis H, auf dem Längenmassstab gemessen, gleich der Längeneinheit, so ist h, auf dem Kräftemassstab abgegriffen, das Drehungsmoment der Kraft AP um den Punkt O; ist aber H, auf dem Kräftemassstab gemessen, gleich der Krafteinheit, so gibt h, auf dem Längenmassstab abgegriffen, jenes Moment.

Dass das Product $H \times h$ das Drehungsmoment der Kraft P um den Punkt O ist, kann auch noch auf andere Weise, bloss mit Zuhülfenahme mechanischer Sätze, leicht bewiesen werden. Denn

denkt man sich diese Kraft mit ihrem Angriffspunkt nach D verlegt und dort in die zwei Componenten AE und EP zerlegt, so geht die erste von diesen, wo nöthig verlängert, durch den Punkt O, kann also keine Drehwirkung um denselben ausüben, ihr Hebelarm ist Null. Alle Drehwirkung der Kraft P rührt also von der Componente EP = h her, die, in D wirkend, den Hebelarm H, also das Moment H $\times$ h hat. In dieser Weise betrachtet, ist also hier die Momentenbasis H eigentlich ein Hebelarm und das reducirte Moment h eine Kraft.

2. In Verfolgung des zweiten oben angedeuteten Weges durchschneidet man vom Endpunkte P der Kraft AP aus (Fig. 34) die Verbindungslinie AO ihres Angriffspunktes mit dem Momentenpunkt mit einem Radius gleich der Momentenbasis H in D. Dies ist immer möglich, welche Grösse auch H haben mag; denn durch Verlegung der Kraft P in der Linie, in welcher sie liegt, kann deren Endpunkt der Linie AO so nahe gebracht werden, als man will. Verbindet man jenen Durchschnittspunkt D mit P, so ist die Antiprojection AE der Linie AO auf diese Verbindungslinie das reducirte Moment h.

Fig. 34.

Dies kann wieder leicht mit Hülfe von Sätzen aus der Mechanik bewiesen werden. Denn denkt man sich die Kraft AP in die beiden Componenten AD und DP zerlegt, so geht die eine, AD, wo nöthig verlängert, durch den Momentenpunkt O und kann also keine Drehwirkung ausüben. Die Drehwirkung der Kraft AP reducirt sich folglich auf die ihrer Componente H allein, und diese hat, in A wirkend, den Hebelarm AE = h, also das Drehungsmoment H $\times$ h um den Punkt O. In diesem Falle hat also die Momentenbasis H eigentlich die Bedeutung einer Kraft und das reducirte Moment h die eines Hebelarms.

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so sieht man, dass in dem Product aus Kraft mal Hebelarm, welches ein Moment ausdrückt, auch bezüglich der Benennung die Factoren mit einander verwechselt werden dürfen.

3. Da bei dem eben kennen gelernten Verfahren die Kraft P in der Linie, in welcher sie wirkt, beliebig verlegt werden darf und von der Lage des Angriffspunktes A die Richtungen der Componenten AD und DP abhängen, so ist klar, dass hierbei die Momentenbasis H, als Kraft aufgefasst, nicht bloss ihrer Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach vorgeschrieben werden kann. Denn zerlegt man in einem beliebigen Angriffspunkt die Kraft P in zwei Componenten, von denen die eine gleich der Momentenbasis ist, welche der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorgeschrieben wurde, so kann man den Angriffspunkt der Kraft P in der Linie, in welcher sie wirkt, und mit ihm die beiden Componenten parallel mit sich selbst stets so verschieben, dass die zweite, verlängert, durch den Momentenpunkt O hindurchgeht und also keine Drehwirkung um diesen ausübt. Das Drehungsmoment der Kraft P ist dann wieder gleich dem ihrer Componente H, deren Hebelarm h die Entfernung des verlegten Angriffspunktes von einer durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen zu H ist.

Fig. 35.

Darauf gründet sich folgendes Verfahren für die Reduction des Drehungsmomentes einer Kraft P (Fig. 35) um den Punkt O. Man trägt von dem Angriffspunkt A der Kraft aus die Momentenbasis H der Grösse, Richtung und dem Sinne nach als AD ab und zieht die Verbindungslinie DP, welche, in diesem Sinne genommen, die zweite Componente, in welche P zerlegt werden kann, der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorstellt. Soll also diese zweite Componente, natürlich im Angriffspunkte von P wirkend, verlängert durch den Momentenpunkt O gehen, so muss dieser Angriffspunkt in der Linie, in welcher die Kraft P wirkt, verschoben werden, bis er mit dem Punkt A′ zusammenfällt, wo die durch den Momentenpunkt gezogene Parallele

zu DP jene Linie trifft. Die Entfernung A'E gleich h dieses Punktes von der durch O zu H gezogenen Parallelen ist folglich das reducirte Moment der Kraft P um den Punkt O.

§ 46. Zwei Methoden, um die Drehungsmomente beliebig vieler Kräfte in einer Ebene auf eine gemeinschaftliche Basis zu reduciren. — Es ist sehr leicht zu zeigen, wie die im vorigen § kennen gelernten Methoden für die Reduction des Drehungsmomentes einer Kraft angewendet werden können, wenn es sich darum handelt, diese Aufgabe für mehrere Kräfte zugleich zu lösen, die alle in einer Ebene liegen, in der sich auch der Momentenpunkt befindet.

1. In Anwendung der ersten Methode wird man um den Momentenpunkt O (Fig. 36) mit einem Radius gleich der Momentenbasis H einen Kreis beschreiben und die gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3..., gleichviel nach welcher Seite hin, verlängern, bis sie die Peripherie jenes Kreises in den Punkten D_1, D_2, D_3... schneiden. Damit in jedem Falle ein solcher Schnittpunkt gefunden wird, darf nur die Basis H grösser angenommen werden als die grösste vorkommende Entfernung des Punktes O von einer Kraft. Verbindet man die Schnittpunkte D_1, D_2, D_3... mit dem Momentenpunkt O und construirt die Antiprojectionen h_1, h_2, h_3... der Kräfte auf diese Verbindungslinien, so sind diese Antiprojectionen die auf die gemeinschaftliche Momentenbasis H reducirten Drehungsmomente der Kräfte um den Punkt O.

Fig. 36.

Fig. 37.

2. Die Anwendung der zweiten Methode oder vielmehr der Modification derselben unter Nr. 3 des vorigen § führt zu folgendem Verfahren, die Momente der in einer Ebene gelegenen Kräfte P_1, P_2, P_3... (Fig. 37) in Bezug auf einen Punkt O dieser Ebene auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis H zu reduciren. Man trägt von den Angriffspunkten A_1, A_2, A_3... der Kräfte die Momentenbasis H in beliebiger aber überall gleicher Richtung und in demselben Sinne als A_1D_1, A_2D_2, A_3D_3.... ab, verbindet die Endpunkte D_1, D_2, D_3... mit den Endpunkten P_1, P_2, P_3... der Kräfte und zieht durch den Momentenpunkt Parallele zu diesen Verbindungslinien, bis sie die Linien, in welchen die Kräfte wirken, in A'_1, A'_2, A'_3... schneiden. Die senkrechten Entfernungen h_1, h_2, h_3... dieser Schnittpunkte von der durch den Momentenpunkt O gezogenen Parallelen zur Basis H sind die reducirten Momente der gegebenen Kräfte um den Punkt O.

§ 47. Drehrichtung, Vorzeichen der Drehungsmomente. — Wir haben bisher immer bloss die absolute Grösse des Drehungsmomentes einer Kraft um einen Punkt im Auge gehabt. Die Momente von Kräften aber, die alle in einer Ebene liegen, bezogen auf einen Punkt dieser

Ebene lassen sich auch qualitativ von einander unterscheiden, je nachdem die Kraft nämlich die Ebene um den Punkt in dem einen oder im entgegengesetzten Sinne zu drehen sucht.

Wir werden in der Folge die Drehung einer Ebene, die wir vor uns liegend annehmen, um einen Punkt in ihr rechtsseitig nennen, wenn sich die links vom Punkte gelegenen Theile ober ihn weg nach rechts hinüberbewegen, wenn also die Drehrichtung mit derjenigen des Zeigers einer Uhr übereinstimmt; die entgegengesetzte Drehrichtung heisst dann natürlich linksseitig. Man nennt auch wohl die eine, gewöhnlich die erstere Drehrichtung, die positive, die andere die negative. Dem entsprechend versieht man da, wo die Drehrichtung berücksichtigt werden soll, die Drehungsmomente von Kräften in einer Ebene um einen Punkt dieser Ebene mit dem Vorzeichen $+$, wenn die betr. Kraft die Ebene um den Momentenpunkt rechtsseitig zu drehen sucht; im anderen Fall mit dem Zeichen $-$. Dieselben Vorzeichen behalten dann natürlich auch die reducirten Momente.

An den in Fig. 36 auf die erste Methode des vorigen § erhaltenen reducirten Momenten h_1, $h_2 \ldots$ lässt sich kein unmittelbar in die Augen fallendes Merkmal angeben, durch welches ihr Vorzeichen zu bestimmen wäre. Man muss hier immer auf die Drehrichtung der Kräfte P_1, $P_2 \ldots$ selbst oder doch auf die der Componenten A_1E_1, $A_2E_2 \ldots$ zurückgehen, welch' letztere man aber dabei stets parallel mit sich selbst in die Schnittpunkte D_1, $D_2 \ldots$ verlegen muss. So findet man, dass obigen Annahmen zufolge die reducirten Momente h_2 und h_4 mit dem positiven, die h_1 und h_3 mit dem negativen Vorzeichen zu versehen sind. Dagegen lässt sich bei Anwendung der zweiten Methode für die Aufsuchung der reducirten Momente von Kräften in einer Ebene, nach welcher Methode Fig. 37 gezeichnet wurde, sofort aus der Lage der h erkennen, welches Vorzeichen ihnen zukommt. Denn da die Momentenbasis H bei jeder Kraft nach derselben Seite hin gekehrt ist und h die Hebelarme der Componenten H bedeuten, in welche jede Kraft zerlegt wird, so muss das Drehungsmoment positiv oder negativ sein, je nachdem das betr. h auf der einen oder anderen Seite der durch den Momentenpunkt O zu H gezogenen Parallelen liegt. Unseren obigen Abmachungen gemäss ist den unterhalb jener Parallelen gelegenen h das Zeichen $+$, den oberhalb gelegenen das Zeichen $-$ zu geben.

§ 48. Drehungsmoment der Resultante von Kräften in einer Ebene. — Bezüglich der Gesammtdrehwirkung von Kräften in einer Ebene um einen Punkt dieser Ebene existirt ein sehr einfacher Satz: Das Drehungsmoment der Resultante von Kräften in einer Ebene um einen Punkt derselben ist gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der Componenten, wobei die Drehungsmomente auf die im vorigen § besprochene Weise mit ihren Vorzeichen zu versehen sind.

Fig. 38

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir zunächst zwei Kräfte P_1, P_2, welche in den beliebigen sich schneidenden oder parallelen Linien M_1N_1 und M_2N_2 (Fig. 38^b) wirken mögen; RS sei die Linie, in welcher ihre Resultante gelegen ist, O der Momentenpunkt. Durch denselben ziehen wir eine beliebige gerade Linie, welche die vorhin genannten bezw. in den Punkten A_1, A_2 und O' schneidet. In erstere Punkte verlegen wir die Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2. In dem Kräftepolygon 0 1 2

(Fig. 38[a]) derselben lässt sich der Pol C, wie leicht zu sehen, immer so annehmen, dass sich die beiden äussersten Seiten des zugehörigen Seilpolygons 0 I II III (Fig. 38[b]) im Punkte O′ schneiden und die mittlere, I II, parallel zu A_1A_2 wird. Dann sind die Dreiecke 01C und 1C2 in Fig. 38[a] den Dreiecken IA_1O' und IIA_2O' in Fig. 38[b] bezw. ähnlich, woraus die Proportionen folgen:

$$\overline{01} : \overline{1C} = \overline{IA_1} : \overline{A_1O'}.$$
$$\overline{1C} : \overline{12} = \overline{O'A_2} : \overline{IIA_2}$$
$$\overline{01} : \overline{12} = \overline{IA_1} \times \overline{O'A_2} : \overline{IIA_2} \times \overline{A_1O'}.$$

Weil aber die Grundlinien der Dreiecke $A_1O'I$ und $O'A_2II$ in einer und derselben geraden Linie und ihre Spitzen in einer Parallelen dazu liegen, so verhalten sich ihre Grundlinien wie ihre Flächeninhalte, also

$$O'A_2 : A_1O' = \triangle O'A_2II : \triangle A_1O'I = II\,A_2 \times O'B_2 : IA_1 \times O'B_1,$$

wo $O'B_1$ und $O'B_2$ bezw. senkrecht auf M_1N_1 und M_2N_2 gefällt sind. Dieses Resultat in obige Proportion substituirt ergibt

$$01 : 12 = IA_1 \times IIA_2 \times O'B_2 : IIA_2 \times IA_1 \times O'B_1$$

oder

$$P_1 : P_2 = O'B_2 : O'B_1$$
$$P_1 \times O'B_1 = P_2 \times O'B_2,$$

und weil $O'B_1$ und $O'B_2$ auch die Höhen der Dreiecke A_1P_1O' und A_2P_2O' sind, so sind nach letzterer Gleichung deren Flächeninhalte und folglich die Drehungsmomente der Kräfte P_1 und P_2 um den Punkt O′ ihrer Resultante, welche durch jene Flächeninhalte repräsentirt werden, einander gleich. Diese Drehungsmomente haben aber wegen der stets entgegengesetzten Drehrichtung der Kräfte um den Punkt O′ entgegengesetztes Vorzeichen; ihre Summe ist also Null. Ebenso aber ist das Drehungsmoment der Resultante um jeden Punkt in der geraden Linie, in der sie wirkt, Null. Für den speciellen Fall, wo der Momentenpunkt in der Resultante zweier Kräfte angenommen wird, ist somit der Satz, dass die algebraische Summe der Drehungsmomente zweier Kräfte gleich dem Drehungsmoment der Resultante ist, erwiesen.

Für den beliebigen Momentpunkt O repräsentiren die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke A_1P_1O und A_2P_2O die Drehungsmomente der Kräfte P_1 und P_2; von denselben ist das erstere stets gleich der algebraischen Summe der Dreiecke A_1P_1O' und $O'OP_1$, das letztere gleich der algebraischen Summe der Dreiecke A_2P_2O' und $O'OP_2$. Unter Berücksichtigung also, dass die durch die Dreiecke A_1P_1O' und A_2P_2O' repräsentirten Drehungsmomente von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Vorzeichen sind, ist die algebraische Summe der Drehungsmomente der Componenten um den Punkt O gleich der doppelten algebraischen Summe der Dreiecke $O'OP_1$ und $O'OP_2$. Diese können durch Ziehen der Parallelen $P_1P'_1$ und $P_2P'_2$ zu A_1A_2 in die gleichgrossen $O'OP'_1$ und $O'OP'_2$ verwandelt werden. Die algebraische Summe dieser letzteren Dreiecke ist aber einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie, in RS gelegen, gleich der algebraischen Summe der Grundlinien $O'P'_1$ und $O'P'_2$ ist, und dessen Spitze in O liegt. Die Grundlinien $O'P'_1$ und $O'P'_2$ sind ferner nichts anderes als die in der Richtung A_1A_2 genommenen Projectionen der Componenten auf die Linie RS, in welcher die Resultante liegt. Die algebraische Summe dieser Projectionen ist gleich der Resultante. Folglich ist die algebraische Summe der Dreiecke $O'OP'_1$ und $O'OP'_2$ gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie die Resultante ist, und dessen Spitze in O liegt, dessen doppelter Flächeninhalt also gleich dem Drehungsmoment der Resultante um O ist. Und damit ist der obige Satz zunächst für zwei Kräfte erwiesen.

Man denke sich endlich die Resultante mehrerer in einer Ebene gelegenen Kräfte so gefunden, dass man zuerst zwei derselben in eine Mittelkraft vereinigt, mit dieser dann die dritte u. s. w. f., und wende jedesmal den obigen Momentensatz für zwei Kräfte an, indem man immer den nämlichen

Momentenpunkt beibehält, so ergibt sich sehr einfach der oben ausgesprochene allgemeine Satz für Kräfte in einer Ebene.

§ 49. Drehungsmoment eines Gegenpaars, Vereinigung von Gegenpaaren in einer Ebene unter sich und mit Kräften derselben Ebene. — Der im vorigen § erwiesene Satz setzt natürlich voraus, dass eine Resultante der gegebenen Kräfte existirt. Es entsteht daher die Frage, wie gross die algebraische Summe der Momente zunächst zweier paralleler und entgegengesetzter Kräfte sei, die ein Gegenpaar bilden, oder deren Resultante eine unendlich kleine Kraft in der unendlich fernen Geraden der Ebene des Gegenpaars ist? Diese Frage ist sehr leicht zu beantworten. Seien P_1 und P_2 (Fig. 39) zwei solche Kräfte und O ein beliebiger Momentenpunkt in ihrer Ebene. Dann sind A_1P_1O und A_2P_2O die Dreiecke, deren doppelte Flächeninhalte den Drehungsmomenten der betr. Kräfte gleich sind. Zieht man die Verbindungslinie A_1P_2 und durch den Momentenpunkt O eine Parallele zu den Kräften, bis jene Verbindungslinie in O' getroffen wird, so kann anstatt des Momentenpunktes O sofort der O' genommen werden, ohne dass die Drehungsmomente der Kräfte sich ändern: die Dreiecke A_1P_1O' und A_2P_2O' sind bezw. den Dreiecken A_1P_1O und A_2P_2O gleich. Berücksichtigt man nun, dass wegen des Parallelismus der Verbindungslinien P_1A_2 und A_1P_2 das Dreieck A_2P_2O' dem Dreieck P_1P_2O' gleich ist, so ergibt sich leicht, dass die algebraische Summe der Dreiecke A_1P_1O' und A_2P_2O' gleich dem Dreieck $A_1P_1P_2$ ist. Dies gilt, ob jene algebraische Summe eine Differenz wird, wie in dem Falle unserer Figur, wo der Momentenpunkt O und also auch der O' ausserhalb der beiden Kräfte des Gegenpaars liegt, so dass diese entgegengesetzte Drehrichtungen um ihn haben — oder ob jene algebraische Summe eine wirkliche ist, wie da, wo der Momentenpunkt zwischen den nun in einerlei Richtung um ihn drehenden Kräften des Gegenpaars gelegen ist.

Fig. 39.

Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $A_1P_1P_2$ ist also gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der Kräfte des Gegenpaares oder, wie man kurz sagt, gleich *dem Drehungsmomente des Gegenpaares* und zwar um irgend einen Punkt in der Ebene desselben. Denn in der That kommt es, wie obige Beweisführung zeigt, auf die specielle Lage des Punktes O gar nicht an; das Endresultat für die algebraische Summe der Drehungsmomente ist stets der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $A_1P_1P_2$ oder das Product aus einer der Kräfte des Gegenpaars in ihre senkrechte Entfernung von einander oder in den *Arm* des Gegenpaars, wo auch der Punkt O liegen mag; und ebenso ist die Drehrichtung, in welcher das Gegenpaar die Ebene zu drehen sucht, um jeden ihrer Punkte die nämliche. Dies stimmt vollständig überein mit der Eigenschaft der Gegenpaare, die wir in § 18 nachgewiesen haben, dass sie in ihrer Ebene beliebig verlegt werden dürfen; es entspricht auch dem Charakter des Gegenpaars als einer unendlich kleinen Kraft in der in unendlicher Entfernung gelegenen Geraden seiner Ebene, gegenüber welcher Entfernung eine Verlegung des Momentenpunktes innerhalb endlicher Grenzen natürlich verschwindet.

Aber die Uebereinstimmung der obigen Resultate mit den Ausführungen im § 18 geht noch weiter. Das Dreieck $A_1P_1P_2$, dessen doppelter Flächeninhalt das Drehungsmoment des Gegenpaars repräsentirt, ist gleich jedem Dreieck, dessen Grundlinie die eine Kraft des Gegenpaars ist, und dessen Spitze in der anderen liegt. Letztere Dreiecke haben wir in § 18 als charakteristisch für ein Gegenpaar erkannt. Dasselbe kann in seiner Ebene beliebig verlegt und verändert werden, wenn nur immer der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die eine Kraft ist, und dessen Spitze in der anderen liegt, der nämliche bleibt. Wir können jetzt kürzer sagen, dass das *Drehungsmoment* des Gegenpaars bei jener Veränderung und Verlegung gleichgross bleiben muss.

Es versteht sich wohl von selbst, dass, wenn unter Kräften, welche alle in einer Ebene liegen, Gegenpaare vorkommen, die Kräfte derselben entweder einzeln oder als Gegenpaare bei der Her-

stellung der algebraischen Summe aller Drehungsmomente genommen werden können. Diese algebraische Summe ist stets gleich dem Drehungsmoment der Resultante, wenn eine solche vorhanden, eventuell dem Drehungsmoment des Gegenpaars, in das sich die Kräfte vereinigen lassen (§ 34), oder im Falle des Gleichgewichts Null für jeden Momentenpunkt in der Ebene.

Speciell bei der Zusammensetzung einer Kraft und eines Gegenpaars, welche beide in der nämlichen Ebene liegen, wird, wie in § 26 gezeigt, die Kraft parallel mit sich selbst um so viel verschoben, dass die Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie die gegebene Kraft und dessen Flächeninhalt gleich dem des charakteristischen Dreiecks des Gegenpaars ist, in der verschobenen Kraft liegt; und die Richtung der Verschiebung ist dadurch bestimmt, dass ein Gegenpaar, dessen eine Kraft die verschobene und dessen andere Kraft gleich und in derselben Linie entgegengesetzt der gegebenen ist, dieselbe Drehrichtung hat wie das gegebene. Wir können jetzt kurz so sagen, dass bei der Zusammensetzung einer Kraft mit einem Gegenpaar in derselben Ebene die Kraft parallel mit sich selbst so weit und in solcher Richtung verschoben wird, dass ihr Drehungsmoment um irgend einen Punkt der Ebene um das des Gegenpaars algebraisch vergrössert wird.

Wenn mehrere Gegenpaare von verschiedenen Drehungsmomenten und Drehrichtungen in derselben Ebene liegen, so ist die algebraische Summe ihrer Drehungsmomente ein Drehungsmoment, welches, gleich wie das der einzelnen Summanden, für jeden Punkt der Ebene der Grösse und dem Vorzeichen nach das nämliche ist. Es gehört also einem Gegenpaar an, dem Resultantengegenpaar der gegebenen. In der That überzeugt man sich auch direct leicht, dass das Resultat der Vereinigung zweier oder mehrerer Gegenpaare in einer Ebene wieder ein Gegenpaar ist; man darf nur die Gegenpaare alle so verwandeln, dass sie den nämlichen Arm erhalten, und dann so verlegen, dass ihre Kräfte in die nämlichen zwei, um die Länge jenes Arms von einander entfernten parallelen Geraden fallen. Diese Vereinigung der Gegenpaare entspricht ganz derjenigen von Kräften (§ 8), die in einer und der nämlichen Geraden, hier in der unendlich fernen Geraden der Ebene wirken, in welcher die Gegenpaare liegen; man darf sich nur jede solche Kraft durch das Moment des Gegenpaars repräsentirt denken.

§ 50. Parallele Verschiebung einer Kraft und Benützung dieses Mittels bei der Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene; Gleichgewichtsbedingungen für dieselben. — Wenn man eine Kraft parallel mit sich selbst verschiebt, oder wenn man, wie auch oft gesagt wird, ihren Angriffspunkt in einen Punkt verlegt, der ausserhalb der geraden Linie liegt, in der sie wirkt, so muss man zu der verschobenen Kraft ein Gegenpaar hinzunehmen, welches durch das Dreieck bestimmt ist, dessen Grundlinie die gegebene Kraft ist, und dessen Spitze im neuen Angriffspunkt liegt. Der Kreispfeil dieses Dreiecks, dessen Richtung mit jener der gegebenen Kraft übereinstimmt, bezeichnet die Drehrichtung des Gegenpaars (§ 41). Man sagt in diesem Falle wohl auch, man habe die gegebene Kraft in die parallel verschobene und in das Gegenpaar zerlegt, dessen Drehungsmoment, wie unmittelbar ersichtlich, einfach das der ursprünglichen Kraft um den neuen Angriffspunkt ist.

Wenn mehrere beliebige Kräfte, sämmtlich in einer Ebene gelegen, gegeben sind, so kann man dieselben auf obige Weise alle in ein und den nämlichen Angriffspunkt O verlegen. Man erhält dann in diesem Punkte eben so viele Kräfte, als ursprünglich gegeben waren, welche in Grösse, Richtung und Sinn mit diesen gegebenen übereinstimmen, und ausserdem noch eine eben so grosse Anzahl von Gegenpaaren, deren Drehungsmomente der Grösse und Richtung nach durch die Dreiecke mit ihren Kreispfeilen bestimmt werden, deren Grundlinien die gegebenen Kräfte sind, deren Spitzen in dem Punkte O liegen, und welche offenbar nichts anderes bedeuten als die Drehungsmomente der ursprünglich gegebenen Kräfte um diesen Punkt. Jene im Punkte O wirkenden Kräfte lassen sich durch ein ebenes Kräftepolygon zu einer Resultante R' vereinigen, die gleichfalls in O angreift,

oder sie sind im Gleichgewicht. Die algebraische Summe der Drehungsmomente der Gegenpaare gibt nach vorigem § das Drehungsmoment eines Gegenpaars in derselben Ebene, welches man schliesslich noch mit der Resultante R' vereinigen kann. Dies geschieht auf bekannte Weise dadurch, dass man die Kraft R' so weit und nach solcher Richtung hin parallel mit sich selbst verschiebt, dass ihr Drehungsmoment um irgend einen Punkt der Ebene um das des Gegenpaars algebraisch vergrössert wird. Die so verschobene Kraft R ist offenbar die *Resultante* sämmtlicher Kräfte und der Weg, welcher zu ihrer Auffindung eingeschlagen wurde, derjenige, welcher zu Ende des vorigen Abschnitts angedeutet worden ist.

Sind die im Angriffspunkte O wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, also die Resultante R gleich Null, nicht aber die algebraische Summe der Drehungsmomente der Gegenpaare, so erhält man für die gegebenen Kräfte bei ihrer Vereinigung ein *Resultantengegenpaar*, dessen Drehungsmoment gleich jener algebraischen Summe oder, was ganz dasselbe ist, gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der gegebenen Kräfte um den Punkt O ist. Wird dagegen die algebraische Summe der Drehungsmomente um den Punkt O gleich Null, nicht aber die Resultante R', so ist diese sogleich die gesuchte Resultante der Kräfte; sind endlich beide, die Resultante R' und die algebraische Summe der Drehungsmomente, Null, so sind die gegebenen Kräfte im *Gleichgewicht*.

Die Resultante R' ist die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des Polygons, das aus den nach O verlegten oder auch aus den ursprünglichen Kräften construirt wird. Nach einem bekannten geometrischen Satz ist die Projection jener Verbindungslinie auf irgend eine Linie gleich der algebraischen Summe der Projectionen der Polygonseiten, also auch gleich der algebraischen Summe der Projectionen der gegebenen Kräfte auf dieselbe Linie. Für ein ebenes Polygon ist aber jene Verbindungslinie Null, wenn ihre Projectionen auf zwei von einander verschiedenen Richtungen in seiner Ebene Null sind. Daraus und aus obigen Betrachtungen folgt der Satz:

Kräfte in einer Ebene sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Projectionen auf zwei von einander verschiedene Richtungen dieser Ebene und die algebraische Summe ihrer Drehungsmomente um irgend einen Punkt derselben Ebene Null wird.

§ 51. Construction der Drehungsmomente gegebener Kräfte in einer Ebene mittelst des Seilpolygons derselben. — Wenn aus beliebigen in einer Ebene gelegenen Kräften P_1, P_2, P_3... (Fig. 40) das Kräfte- und das Seilpolygon 0 1 2 3... und 0 I II III... construirt sind, dann lassen sich die Drehungsmomente dieser Kräfte um einen beliebigen Punkt O in der Ebene noch in einer Weise ausdrücken, deren Benützung in manchen Fällen und besonders in *einem*, bald näher zu bezeichnenden grosse Vortheile bietet. Zieht man nämlich durch den Punkt O Parallele OQ_1, OQ_2, OQ_3... zu den Kräften und verlängert für jede der letzteren die ihr vorangehende sowohl als die ihr nachfolgende Seilpolygonseite, bis sie die Parallele zur Kraft schneiden, dann ist das Product aus dem Abschnitt zwischen den hierdurch erhaltenen Schnittpunkten in die senkrechte Entfernung des Poles C von derjenigen Seite des Kräftepolygons, welche der betreffenden Kraft entspricht, gleich dem Drehungsmoment dieser Kraft um den Momentenpunkt O.

Fig. 40

a) b)

Dies ist sehr leicht zu beweisen. Für die Kraft P_2 z. B. ist das Dreieck $a_2 m_2 II$ im Seilpolygon ähnlich dem Dreieck $1\,2\,C$ im Kräftepolygon. Die Grundlinien $a_2 m_2$ und $1\,2$ dieser Dreiecke verhalten sich also wie die zugehörigen Höhen. Die Höhe des Dreiecks $a_2 m_2 II$ ist aber nichts anderes als die senkrechte Entfernung der Kraft P_2 vom Momentenpunkt O oder ihr Hebelarm L_2; die Höhe des Dreiecks $1\,2\,C$ ist die senkrechte Entfernung des Poles C von der Kräftepolygonseite $1\,2$; wir wollen sie mit H_2 bezeichnen. Nun folgt aus der Proportion

$$\overline{a_2 m_2} : \overline{1\,2} = L_2 : H_2$$

die Productengleichung $$\overline{a_2 m_2} \times H_2 = \overline{1\,2} \times L_2,$$

in welcher das zweite Product nach der ursprünglichen Definition das Drehungsmoment der Kraft P_2 um den Punkt O bedeutet; das erste Product hat folglich die nämliche Bedeutung.

Es versteht sich von selbst, dass die eben kennen gelernte Ausdrucksweise für das Drehungsmoment einer einzelnen Kraft sofort auf das der Resultante mehrerer auf einander folgenden Kräfte angewendet werden kann. Denn diese ist im Allgemeinen nichts anderes als eine Kraft, welche durch den Durchschnittspunkt der den Componenten zugehörigen äussersten Seilpolygonseiten hindurchgeht, und deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale repräsentirt ist, welche im Kräftepolygon die den Componenten entsprechenden Seiten unterspannt. Wenn folglich das Drehungsmoment einer solchen Resultante P_{1-3} z. B. (Fig. 40) um einen Punkt O gefunden werden soll, so darf man nur durch diesen Punkt eine Parallele $O Q_{1-3}$ zu ihr, also zur Diagnole $0\,3$ ziehen, welche im Kräftepolygon die den Componenten entsprechenden Seiten unterspannt, und hierauf die äussersten Seilpolygonseiten 0 I und III IV verlängern, bis sie jene Parallele schneiden. Das Product aus dem dadurch erhaltenen Abschnitt $a_{1-3} m_{1-3}$ auf der Parallelen in die senkrechte Entfernung des Poles C von der Diagonale $0\,3$, welche die Resultante im Kräftepolygon repräsentirt, ist dann das Drehungsmoment der Resultante um den Punkt O, also nach § 48 die algebraische Summe der Drehungsmomente der Componenten P_1, P_2, P_3 um denselben Punkt.

Dieser Satz ist, wie auf den ersten Blick scheint, nicht mehr anwendbar in dem Falle, wo das Kräftepolygon aus den Kräften, um deren Gesammtdrehungsmoment es sich handelt, geschlossen ist. Denn dann wird die Diagonale, welche sie alle unterspannt, Null und ihre Richtung unbestimmt. Schliesst sich das Seilpolygon ebenfalls, fallen also dessen äusserste Seiten zusammen, so wird der zwischen ihnen liegende Abschnitt auf jeder sie schneidenden Linie Null. Solche Kräfte sind aber im Gleichgewicht, und die algebraische Summe ihrer Momente verschwindet für jeden Punkt in ihrer Ebene. Wenn aber die äussersten Seilpolygonseiten nicht zusammenfallen, sondern nur parallel sind, so erhält man einen Abschnitt zwischen denselben auf jeder sie schneidenden Linie. Nun geben Kräfte, deren Kräftepolygon sich schliesst, während das Seilpolygon offen bleibt, ein Gegenpaar, dessen Kräfte in den äussersten Seilpolygonseiten liegen und eine Grösse haben gleich dem Strahl vom Pol nach dem Anfangspunkt des Kräftepolygons. Dies berücksichtigt, lässt sich leicht zeigen, dass das Drehungsmoment jenes Gegenpaars stets gleich dem Producte wird, dessen einer Factor der Abschnitt ist, welchen die parallelen äussersten Seilpolygonseiten auf irgend einer sie schneidenden Linie machen, und dessen anderer Factor der Abstand des Pols im Kräftepolygon von derjenigen Parallelen zu dieser Linie ist, welche durch den Anfangspunkt des letztgenannten Polygons gelegt wird. Wenn man also in dem Falle, wo das Kräftepolygon auf einander folgender Kräfte sich schliesst, der Diagonale, welche sie alle unterspannt, und deren Grösse Null und Richtung unbestimmt wird, eine ganz beliebige Richtung gibt, nur nicht gerade die durch den Pol gehende, so lässt sich der oben ausgesprochene Satz auch auf diesen Fall anwenden.

Wir denken uns in die durch den Momentenpunkt O (Fig. 40) zu den Kräften P_1, P_2, $P_3 \ldots$ gezogenen Parallelen $O Q_1$, $O Q_2$, $O Q_3 \ldots$ denselben Sinn gelegt, den die betreffenden Kräfte haben. Dies geben wir dadurch zu erkennen, dass wir den Buchstaben Q, versehen mit entsprechendem

Index, auf diejenige Seite von O an jene Parallelen schreiben, dass die von O nach Q genommene Richtung jenem Sinne entspricht. — Die Endpunkte des Abschnittes auf jeder solchen Parallelen bezeichnen wir mit den Buchstaben a und m, versehen mit dem entsprechenden Index, und zwar schreiben wir stets den Buchstaben a an den Schnittpunkt der Parallelen mit der in der natürlichen Ordnung vorhergehenden Seilpolygonseite, den Buchstaben m an den Schnittpunkt mit der nachfolgenden und fassen den Sinn des Abschnittes stets in der Richtung von a nach m auf. Dies vorausgesetzt, ergibt sich für die Drehrichtung der Kräfte um den Momentenpunkt, also für das Vorzeichen der Drehungsmomente leicht die folgende Regel: Wenn der Pol C im Kräftepolygon auf der nämlichen rechten oder linken Seite zweier oder mehrerer Kräfte in jenem Polygon gelegen ist, wobei diese Kräfte in dem ihnen eigenthümlichen Sinn aufzufassen sind, so ist die Drehrichtung dieser Kräfte um den Momentenpunkt die eine oder die andere, je nachdem der Sinn des zugehörigen Abschnittes am mit dem der Parallelen, in welcher er liegt, übereinstimmt oder nicht. Wenn aber bei zwei Kräften, die mit einander verglichen werden, der Pol C im Kräftepolygon auf verschiedenen Seiten der jenen Kräften entsprechenden Kräftepolygonseiten liegt, dann haben beide Kräfte gleiche Drehrichtung, wenn bei der einen der Sinn des Abschnittes am mit dem der Parallelen, auf welcher er liegt, übereinstimmt, bei der anderen nicht; sie haben aber entgegengesetzte Drehrichtungen, wenn beidemal die Sinne der Abschnitte am und der zugehörigen Parallelen übereinstimmen oder entgegengesetzt sind.

Kürzer lässt sich diese Regel so ausdrücken. Versieht man die Entfernung des Poles C von der einer gewissen Kraft oder Resultante entsprechenden Kräftepolygon-Seite oder Diagonale mit dem Zeichen + oder —, je nachdem C auf der einen, z. B. rechten, oder auf der anderen, linken Seite jener Polygon-Seite oder Diagonale liegt, und gibt man dem zugehörigen Abschnitt am das Zeichen + oder —, je nachdem sein Sinn mit dem der Parallelen, in welcher er liegt, übereinstimmt oder nicht: so gibt das Product jener beiden Grössen das Drehungsmoment nicht bloss der Grösse, sondern auch dem Vorzeichen nach, d. h. die Drehrichtung der betr. Kraft oder Resultante ist die eine oder andere, je nachdem das Vorzeichen jenes Products + oder — wird.

So liegt in Fig. 40 der Pol C im Kräftepolygon auf einerlei, auf der rechten Seite nämlich, der Seiten 0 1, 1 2, 2 3 und der Diagonale 0 3. Daher haben die Kräfte P_1 und P_2, bei welchen beiden der Sinn der Abschnitte $a_1 m_1$ und $a_2 m_2$ mit dem der Parallelen OQ_1 und OQ_2, in denen sie liegen, übereinstimmt, gleiche Drehrichtung; ebenso haben die Kraft P_3 und die Resultante P_{1-3}, bei welchen beiden der Sinn der Abschnitte $a_3 m_3$ und $a_{1-3} m_{1-3}$ entgegengesetzt von dem der Parallelen OQ_3 und OQ_{1-3} ist, gleiche Drehrichtung unter sich, aber entgegengesetzt derjenigen der ersten beiden Kräfte.

Da indessen die Drehrichtung einer Kraft oder Resultante um einen Momentenpunkt in der Regel leicht direct angegeben werden kann, so haben obige Regeln für die unmittelbare Anwendung keinen grossen Werth.

§ 52. **Construction der reducirten Drehungsmomente gegebener Kräfte in einer Ebene mittelst des Seilpolygons derselben.** — Die Momente von Kräften in einer Ebene und deren Resultanten stellen sich, auf die im vorigen § behandelte Weise construirt, wieder als Producte zweier Linien, als Flächen dar. Für ein consequentes Verfolgen des graphischen Verfahrens ist es also auch hier wieder nothwendig, die Drehungsmomente auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis zu reduciren. Diese Reduction würde sich ganz von selbst ergeben, wenn man dem Pol im Kräftepolygon gleiche Entfernung von allen Seiten und Diagonalen desselben geben könnte. Die Abschnitte auf den durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen im Seilpolygon würden dann sofort die reducirten Momente sein. Das ist aber nur bei parallelen Kräften möglich, für welche das ganze Seilpolygon in eine gerade Linie fällt. Für solche Kräfte ist daher das in Rede stehende Verfahren zur Aufsuchung ihrer Drehungsmomente ganz besonders von Vortheil, wie im folgenden § noch mehr hervortreten wird.

Wenn man es aber mit beliebigen Kräften in einer Ebene zu thun hat, und es ist aus denselben das Kräfte- und Seilpolygon noch nicht construirt, so kann man den willkürlich anzunehmenden Pol im Kräftepolygon leicht so wählen, dass man das reducirte Moment einer oder der anderen Kraft oder Resultante sofort unmittelbar bekommt. Wenn es z. B. bloss darauf ankommt, das reducirte Moment der Resultante sämmtlicher Kräfte (also die algebraische Summe ihrer reducirten Momente) zu finden, so wird man den Pol im Kräftepolygon in einer Entfernung gleich der Momentenbasis von der Diagonale, welche sämmtliche Kräfte unterspannt, sonst aber beliebig annehmen und für ihn das Seilpolygon zeichnen. In demselben ist dann der Abschnitt auf der durch den Momentenpunkt zur Resultante gezogenen Parallelen, welcher von den äussersten Seilpolygonseiten gemacht wird, das reducirte Moment der Resultante.

Ist aber das Kräfte- und Seilpolygon gegebener Kräfte in einer Ebene schon gezeichnet, so können durch ein Verfahren, das mindestens eben so einfach ist als die beiden im § 46 gezeigten, die Momente sämmtlicher einzelnen Kräfte sowohl, als auch die von Resultanten einer beliebigen Anzahl auf einander folgender derselben auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis reducirt werden. Man darf nur jedesmal für irgend eine solche Kraft oder Resultante einen neuen Pol im Kräftepolygon annehmen, der von der betr. Seite oder Diagonale desselben um die Momentenbasis entfernt ist, und für diesen Pol das neue Seilpolygon oder vielmehr nur den zur Erreichung des vorgesetzten Zweckes nothwendigen Theil desselben zeichnen. Wenn dann jener neue Pol immer auf der nämlichen, entweder linken oder rechten Seite der betr. Kraft oder Resultante im Kräftepolygon angenommen wird, so gibt der Sinn des Abschnittes auf der durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen, ob er mit demjenigen dieser Parallelen übereinstimmt oder nicht, sogleich die Drehrichtung der betr. Kraft oder Resultante zu erkennen.

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, wie dies Verfahren am einfachsten durchzuführen ist. In Fig. 17[b] Taf. IV seien P_1, P_2, P_3... gegebene Kräfte, welche in Fig. 17[a] zum Kräftepolygon 0 1 2 3 4... an einander getragen sind. C sei ein willkürlicher Pol dieses Polygons, für den in Fig 17[b] das Seilpolygon 0 I II III IV V... gezeichnet ist. Durch den Momentenpunkt O seien die Parallelen OQ_1, OQ_2, OQ_3..., dann OQ_{1-4} zu den Kräften und bezw. zur Resultante 0 4 der vier ersten derselben gezogen. Die Abschnitte $a_1 m_1$, $a_2 m_2$, $a_3 m_3$... und $a_{1-4} m_{1-4}$ auf diesen Parallelen multiplicirt mit den Entfernungen des Poles C von den Seiten 0 1, 1 2, 2 3... und bezw. der Diagonale 0 4 geben die Drehungsmomente jener Kräfte und der Resultante 0 4 in Bezug auf den Punkt O.

Um diese Drehungsmomente auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis zu reduciren, nehmen wir für jede der Kräfte P_1, P_2, P_3... oder für die Resultante P_{1-4} einen neuen Pol C_1, C_2, C_3..., C_{1-4} im Kräftepolygon an, welcher stets auf der nämlichen, linken Seite der betr. Kraft in einer Entfernung gleich der Momentenbasis von derselben und zwar in den nach dem alten Pol gezogenen Anfangsstrahlen 0 C, 1 C, 2 C... und bezw. 0 C (für die Resultante) liegt. Von den diesen Polen zugehörigen Seilpolygonen sind dann für unseren Zweck immer nur die der betr. Kraft vorangehende und nachfolgende Seite, bei der Resultante die äusserste vorangehende und äusserste nachfolgende Seite zu zeichnen. Die vorangehenden Seiten aber kann man zufolge der speciellen oben bezeichneten Lage der neuen Pole mit den betr. alten Seilpolygonseiten 0 I, I II, II III... und bezw. 0 I (für die Resultante) zusammenfallen lassen. Dann hat man durch die Schnittpunkte I, II, III... und α dieser Seiten mit den betr. Kräften die neuen nachfolgenden Seilpolygonseiten parallel zu den neuen Endstrahlen $1 C_1$, $2 C_2$, $3 C_3$..., dann $4 C_{1-4}$ im Kräftepolygon zu ziehen, bis sie die durch den Momentenpunkt gezogenen Parallelen in den Punkten m'_1, m'_2, m'_3..., m'_{1-4} schneiden. Die Abschnitte $a_1 m'_1$, $a_2 m'_2$, $a_3 m'_3$..., $a_{1-4} m'_{1-4}$ auf jenen Parallelen sind dann die reducirten Momente der Kräfte P_1, P_2, P_3... und der Resultante P_{1-4} der Grösse und dem Vorzeichen nach. Dem Vorzeichen nach, indem die Abschnitte $a_1 m'_1$, $a_3 m'_3$ und $a_{1-4} m'_{1-4}$, deren Sinn demjenigen der Parallelen, auf welchen sie liegen, entgegengesetzt ist, Kräften mit negativer (linksseitiger) Drehrichtung angehören, während

die Abschnitte $a_2 m'_2$, $a_4 m'_4$ mit gleichem Sinn wie die Parallelen, in denen sie liegen, Kräften zugehören, deren Drehrichtung um den Punkt O positiv (rechtsseitig) ist.

§ 53. Die reducirten Drehungsmomente paralleler Kräfte in einer Ebene. — Wir haben bereits darauf aufmerksam gemacht, dass das in § 51 kennen gelernte Verfahren zur Aufsuchung der Drehungsmomente in einem bestimmten Falle eine besondere Einfachheit und deshalb Wichtigkeit erhält. Dieser Fall tritt ein bei parallelen Kräften in einer Ebene. Für solche fällt das Kräftepolygon mit allen seinen Seiten und Diagonalen in eine gerade Linie, Kräftelinie genannt; der Pol hat folglich von allen diesen gleiche Entfernung. Nimmt man also diese Entfernung gleich der Momentenbasis, so erhält man alle Momente auf diese reducirt. Die Abschnitte, welche die betr. Seilpolygonseiten auf den durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen machen, sind sofort die reducirten Momente. Noch mehr: jene Parallelen fallen selbst alle in eine gerade Linie zusammen, auf welcher also sämmtliche Momente abgeschnitten werden, und zwar, wie sehr leicht zu sehen, in der Weise, dass der einer folgenden Kraft zugehörige Abschnitt mit seinem Anfangspunkt a unmittelbar an den Endpunkt m des Abschnittes der vorhergehenden Kraft angereiht ist. Da hiernach unserer in § 51 gewählten allgemeinen Bezeichnung gemäss an jeden solchen Zwischenpunkt zwei Buchstaben, a und m, mit ihren betr. Zeigern zu schreiben wären, so wollen wir für den vorliegenden Fall paralleler Kräfte die Bezeichnung etwas ändern. Wir schreiben an den Anfangspunkt des Abschnittes für die erste Kraft m_0, an den Endpunkt m_1, ferner an den Endpunkt des sich hieran reihenden Abschnittes für die zweite Kraft m_2 u. s. w. f.

In der durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen sind endlich die Momentenabschnitte nicht bloss ihrer Grösse und Richtung, sondern auch ihrem Sinne, ihrem Vorzeichen nach an einander gereiht: Abschnitte mit gleichem Sinne gehören Kräften mit gleicher Drehrichtung und Abschnitte mit entgegengesetztem Sinne Kräften mit entgegengesetzter Drehrichtung an, ganz ohne Rücksicht auf den Sinn der Kräfte selbst, denen sie angehören und der durch den Momentenpunkt zu ihnen gezogenen Parallelen. Dies ist leicht zu beweisen. Denkt man sich den Sinn einer Kraft, ohne ihre Grösse, Richtung und Lage zu ändern, einfach umgekehrt, so wird ihre Drehrichtung die entgegengesetzte, ohne dass sich die absolute Grösse ihres Drehungsmomentes ändert. Mit dem Sinn der Kraft wird aber zugleich der Sinn der ihr entsprechenden Kräftepolygonseite, mithin die Seite derselben, auf welcher der Pol liegt, ferner der Sinn der durch den Momentenpunkt zu dieser Kraft gezogenen Parallelen und endlich der Sinn des Abschnittes, nicht aber dessen Grösse geändert. Wegen der letzteren beiden, gleichzeitig stattfindenden Aenderungen bleibt das Vorzeichen des Abschnittes ungeändert, aber das des Momentes kehrt sich um, weil die Seite, auf welcher der Pol des Kräftepolygons von der betr. Seite desselben liegt, die entgegengesetzte geworden ist. Die Umkehrung des Sinnes des Abschnitts gibt also doch diejenige des Vorzeichens des Drehungsmomentes zu erkennen. Wenn man aber, ohne die Grösse, Richtung und den Sinn einer Kraft zu ändern, dieselbe einfach von einer Seite des Momentenpunktes auf die andere legt, so ändert sich gleichfalls das Vorzeichen des Drehungsmomentes desselben, während von allen hier zu beachtenden, oben näher bezeichneten Linien bloss der Sinn des Abschnittes entgegengesetzt wird und dadurch eben wieder die Aenderung der Drehrichtung zu erkennen gibt.

Auf der durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen werden also die Abschnitte, welche die reducirten Momente der Kräfte geben, auf graphischem Wege algebraisch zu einander addirt, ganz so wie in § 8 die Kräfte, welche in einer und derselben geraden Linie in verschiedenem Sinne thätig sind. Nach dem allgemeinen Satz in § 48 ist folglich das reducirte Moment der Resultante einer Anzahl auf einander folgenden parallelen Kräfte gleich der Strecke vom Anfangspunkt des betr. Abschnittes der ersten Kraft bis zum Endpunkt des Abschnittes der letzten Kraft, und zwar der Grösse und dem Vorzeichen nach. Jene Strecke ist aber nichts anderes als der Abschnitt zwischen den äussersten den Kräften zugehörigen Seilpolygonseiten. Daraus folgt also der

Satz: Das reducirte Drehungsmoment der Resultante paralleler Kräfte oder das Gesammt-Drehungsmoment derselben um irgend einen Punkt ihrer Ebene ist gleich dem Abschnitt zwischen den äussersten Seilpolygonseiten, die diesen Kräften zugehören, auf einer durch den Momentenpunkt zu den Kräften gezogenen Parallelen. Dieser Satz behält nach § 51 seine Anwendbarkeit auch für den Fall, dass das Kräftepolygon sich schliessen sollte.

Ein Beispiel möge diese Betrachtungen noch klarer machen. In Fig. 41 seien vier parallele, zum Theil gleich, zum Theil entgegengesetzt gerichtete, in der Ebene unseres Zeichnungsblattes gelegene Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben. In Fig. 41ᵃ ist das Kräftepolygon 0 1 2 3 4 daraus gezeichnet, das in eine gerade Linie, Kräftelinie, fällt. In einer Entfernung gleich der Momentenbasis von derselben wurde der Pol C angenommen und für denselben in Fig. 41ᵇ das Seilpolygon 0 I II III IV V gezeichnet. Auf der durch den Momentenpunkt O zu den Kräften gezogenen Parallelen OM werden sämmtliche reducirte Momente abgeschnitten, nämlich $m_0 m_1$ für die Kraft P_1, $m_1 m_2$ für die Kraft P_2, $m_2 m_3$ für die Kraft P_3, $m_3 m_4$ für die Kraft P_4. Die beiden nach aufwärts gerichteten Abschnitte $m_0 m_1$ und $m_3 m_4$ gehören Kräften von der einen (linksseitigen oder negativen), die nach abwärts gerichteten Abschnitte $m_1 m_2$, $m_2 m_3$ dagegen Kräften von der entgegengesetzten (rechtsseitigen oder positiven) Drehrichtung an. Die Abschnitte sind, wie es für die graphische Addition nothwendig ist, an einander gereiht; ihre algebraische Summe $m_0 m_4$, der Abschnitt zwischen den äussersten Polygonseiten 0 I und IV V, gibt folglich das Drehungsmoment der Resultante der Grösse und dem Vorzeichen nach. Die Drehrichtung derselben ist linksseitig.

Fig. 41

§ 54. Beispiel: Horizontaler, auf zwei Unterstützungspunkten frei aufliegender, prismatischer Träger (Balken). Als weiteres Beispiel für die vorhergehenden Lehren in Bezug auf parallele Kräfte in einer Ebene nehmen wir den schon in § 39 und Fig. 15 Taf. IV behandelten Balken, der auf zwei, in horizontaler Linie liegenden Stützpunkten A und B frei aufliegt und von vertical abwärts wirkenden Kräften oder Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 angegriffen wird. Die durch diese Kräfte hervorgebrachten Auflagerdrucke, sowie die Resultante sämmtlicher Kraft, die auf ein, durch einen beliebigen Querschnitt abgetrenntes Stück wirken, haben wir dort gefunden. Für die Anwendung der Sätze aus der Elasticitäts- und Festigkeitslehre ist aber ausserdem auch noch das Gesammtdrehungsmoment oder die algebraische Summe der Drehungsmomente jener Kräfte von Wichtigkeit.

Diese Momente, reducirt auf eine Momentenbasis gleich der senkrechten Entfernung des Poles C im Kräftepolygon von der Kräftelinie 0 4, werden auf der durch den Momentenpunkt O gezogenen Verticalen abgeschnitten. Sie sind für die Kräfte A, P_1, P_2, P_3, P_4, B beziehungsweise durch die Abschnitte $M_0 m_0$, $m_0 m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_4$, $m_4 M_0$ der Grösse und dem Vorzeichen nach vorgestellt. Die Kräfte A und P_4, deren Abschnitte $M_0 m_0$ und $m_3 m_4$ abwärts gerichtet sind, haben rechtsseitge, alle anderen linksseitige Drehrichtung. Die algebraische Summe der Drehungsmomente der auf das linke Stück A y wirkenden Kräfte ist $M_0 m_3$, die der Kräfte, welche auf das rechte Stück y B einwirken, gleich $m_3 M_0$, dem vorigen gleich, aber gerade entgegengesetzt, wie ebenfalls wieder von selbst ver-

ständlich, da alle auf den Balken einwirkenden Kräfte im freien Gleichgewicht sind. $M_0 m_3$ oder $m_3 M_0$ ist zugleich der Abschnitt, welcher zwischen den äussersten Seilpolygonseiten V 0 und III IV oder III IV und V 0 liegt, und da die Schlusslinie V 0 allemal entweder die äusserste erste oder äusserste letzte Seilpolygonseite ist, welche den auf eines der Stücke A y oder y B einwirkenden Kräften zugehört, so folgt daraus der Satz:

Für jeden Querschnitt y des Balkens ist der Abschnitt der durch ihn hindurchgehenden Verticallinie, welcher zwischen der Schlusslinie 0 V und dem Polygonumfang 0 I II III IV V liegt, das reducirte Gesammt-Drehungsmoment sämmtlicher, auf der einen oder auf der anderen Seite des Querschnitts gelegenen äusseren Kräfte, die an dem Balken thätig sind. Werden diese Kräfte in der Ordnung von links nach rechts gezählt, so ist für die Kräfte links von jenem Querschnitt der Abschnitt in der Richtung von der Schlusslinie 0 V zum Polygonumfang zu nehmen, für die andere Seite des Querschnitts aber in der entgegengesetzten. Liegt dabei der Pol des Kräftepolygons, wie in unserer Figur, links von der Kräftelinie 0 4 der vertical abwärts gerichteten Kräfte, so gehören Momentenabschnitte mit nach abwärts gerichtetem Sinne Kräften mit positiver oder rechtsseitiger Drehrichtung an.

Daraus folgt noch sehr einfach, dass man für denjenigen Querschnitt das absolut grösste Gesammt-Drehungsmoment der links oder rechts von ihm gelegenen äusseren Kräfte erhält, für welchen die durch ihn hindurchgelegte Verticallinie den Polygonumfang in dem Punkte trifft, wo er von einer zur Schlusslinie 0 V parallel gezogenen Geraden berührt wird. In unserer Figur ist dies für den Querschnitt y_m der Fall. Man nennt diesen Querschnitt den gefährlichen, und zwar, wie sofort einleuchtet, aus dem Grunde, weil an dieser Stelle das Bestreben der auf den Balken einwirkenden Kräfte, ihn abzubrechen, am grössten ist. Für denselben Querschnitt ist, wie aus § 39 unmittelbar hervorgeht, die Summe der ausser ihm wirkenden Kräfte Null, vorausgesetzt, dass man die Kraft P_3, die in ihm selbst wirkt, so auf seine beiden Seiten vertheilt, wie sie durch den Punkt T im Kräftepolygon zerlegt wird. Jene Kräfte bilden also, wie schon dort gesagt, ein Gegenpaar, dessen Drehungsmoment nun bekannt ist.

§ 55. Anwendung der Drehungsmomente zur Bestimmung der Spannungen in den Constructionstheilen eines eisernen Dachstuhles (Fachwerkträgers). — Als drittes Beispiel für die Anwendung der in § 53 gegebenen Sätze über die Drehungsmomente paralleler Kräfte wählen wir die Aufgabe, die Spannungen in den Constructionstheilen eines Fachwerkträgers, und zwar desselben in Fig. 16 Taf. IV gezeichneten, den wir schon in § 40 behandelt haben, zu finden. Dort, in § 40, dachten wir uns die Spannungen in den von einem Querschnitt getroffenen Constructionstheilen als Einwirkungen des abgeschnittenen Trägertheils auf den anderen und fanden sie dann durch Zerlegung der Resultante der auf jenen Trägertheil wirkenden äusseren Kräfte in Componenten, deren Richtung und Lage vorgeschrieben war. Jetzt wollen wir jene Spannungen umgekehrt auffassen, als Einwirkungen des übrig bleibenden Trägertheils auf den abgeschnittenen; dann müssen sie mit den an letzterem thätigen äuseren Kräften im Gleichgewicht sein. Nach dem Satz in § 50 muss folglich die algebraische Summe ihrer Drehungsmomente um irgend einen Punkt in der Ebene des Trägers gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sein dem Gesammt-Drehungsmomente jener äusseren Kräfte um denselben Punkt. Zu den auf den Träger wirkenden äusseren Kräften sind natürlich auch die Auflagerreactionen zu rechnen. Man wird deshalb, wie in Fig. 16 Taf. IV bereits geschehen, aus den gegebenen vertical abwärts wirkenden Kräften oder Lasten P_1, P_2 ...... P_9 das Kräfte- und Seilpolygon, soweit es nöthig ist, construiren, die Gesammtresultante jener Kräfte dann in zwei, mit ihr parallele, durch die Unterstützungspunkte gehende Componenten, die Auflagerdrucke, zerlegen und letztere, entgegengesetzt genommen, als Auflagerreactionen P_0 und P'_0 den äusseren Kräften hinzu-

fügen, wodurch sich das Kräftepolygon sowohl, als auch das Seilpolygon schliesst. In letzterem kann dann für jeden Momentenpunkt in der bekannten Weise die algebraische Summe der Drehungsmomente einer Anzahl auf einander folgender Kräfte, und zwar reducirt auf die Momentenbasis, sofort abgegriffen werden, vorausgesetzt, dass die Entfernung $\mathfrak{A}C$ des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie gleich der Momentenbasis gewählt wurde.

In Fig. 16ᵃ ist diese Entfernung, auf dem dort zu Grunde gelegten Kräftemassstab ($0{,}01^m = 4000^{kg}$) gemessen, gleich $20\,000^{kg}$. Misst man folglich die auf diese Basis reducirten Momentenabschnitte auf dem Längenmassstab ($0{,}005^m = 1^m$), so repräsentirt jeder Meter $20\,000^{mkg}$. Der Massstab für die reducirten Momente ist also $0{,}005^m = 20000^{mkg}$ oder $0{,}01^m = 40\,000^{mkg}$ (§ 43).

Wie schon in § 40 bemerkt, kann jeder Constructionstheil unseres Trägers durch einen Schnitt getroffen werden, der ausser ihn nur noch zwei Constructionstheile durchschneidet. Wählt man also den Durchschnittspunkt von zweien der drei Constructionstheile', welche durch einen solchen Querschnitt getroffen werden, als Momentenpunkt, so sind die Drehungsmomente der Spannungen derselben Null, und es bleibt nur noch das Drehungsmoment der Spannung des dritten Constructionstheils, von dem vorausgesetzt wird, dass er nicht auch durch jenen Momentenpunkt geht. Dieses Drehungsmoment muss folglich dem der äusseren Kräfte, welche auf das abgeschnittene Trägerstück wirken, gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sein. Es ist also bekannt; ebenso der Hebelarm der Spannung, welcher es angehört, und deshalb kann letztere durch Division mit diesem Hebelarm in jenes Gesammtmoment der äusseren Kräfte der Grösse nach gefunden werden. Ihr Sinn ergibt sich aus dem Vorzeichen der Momente. Dies ist, auf vorliegenden Fall angewendet, das Verfahren, wie es zuerst Ritter in consequent ausgebildeter Weise zur Bestimmung der Spannungen in einem Fachwerksystem angewendet hat. Es ist, wie aus Obigem hervorgeht, in den Fällen, wo ein Schnitt bloss drei Constructionstheile trifft, auch graphisch sehr leicht durchführbar.

Sei yy in Fig. 16ᵇ Taf. IV ein solcher Schnitt, durch den bloss die drei Constructionstheile ce, de, df getroffen werden, und wählen wir zunächst den Durchschnittspunkt e der beiden ersten als Momentenpunkt. Dann repräsentirt der Abschnitt f IV auf der durch diesen Punkt gezogenen Verticallinie das reducirte Moment der äusseren Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3, welche auf das durch den Schnitt yy abgetrennte linke Trägerstück wirken. Denn BA ist die jenen Kräften vorangehende, III IV die ihnen nachfolgende äusserste Seilpolygonseite. Der Abschnitt f IV misst, auf jenem Momentenmassstab abgegriffen, 120000^{mkg} ($3{,}00^{cm}$). So gross muss folglich das Drehungsmoment der Spannung in df sein. Da nun deren Hebelarm $ef = 4{,}8^m$ ist, so muss sie selbst $= \frac{120\,000}{4{,}8} = 25000^{kg}$ betragen. Bei der in Fig. 16ᵃ gewählten Lage des Pols im Kräftepolygon sind abwärts gerichtete Momentenabschnitte positiv, d. h. die zugehörigen Kräfte haben zusammen eine rechtsseitige Drehrichtung. Das durch den Abschnitt f IV repräsentirte Moment ist also positiv, und folglich hat die Spannung in df, als Einwirkung des übrig gebliebenen Trägertheils auf den abgeschnittenen aufgefasst, negative Drehrichtung um e. Ihr Sinn muss folglich der durch den kleinen Pfeil in df angezeigte sein, oder sie ist eine Zugspannung.

Nimmt man ebenso den Durchschnittspunkt d der beiden Constructionstheile de und df als Momentenpunkt, so ist $d\text{III} = +\,97\,200^{mkg}$ das Moment der auf den abgeschnittenen Trägertheil wirkenden äusseren Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3 und an Grösse gleich dem Moment der Spannung in ce um den Punkt d. Der Hebelarm dieser letzteren ist aber gleich $dq = 3^m$, folglich ist sie selbst gleich $\frac{97\,200}{3} = 32\,400^{kg}$. Ihre Drehrichtung um d muss negativ, also ihr Sinn der des kleinen Pfeils in ce sein; sie ist eine Druckspannung.

Wählt man endlich den Durchschnittspunkt A der Constructionstheile ce und df als Momentenpunkt, so repräsentirt der Abschnitt $As = +\,48\,000^{mkg}$ das Gesammtdrehungsmoment der äusseren

Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3. Das Drehungsmoment der Spannung in de um den Punkt A muss folglich gleich -48000^{mkg} sein, und da ihr Hebelarm Au $= 6{,}14^m$ ist, so folgt für ihre absolute Grösse $\frac{48000}{6{,}14} = 7820^{kg}$. Ihre Drehrichtung ist negativ, folglich ihr Sinn der durch den kleinen Pfeil in de angedeutete; sie ist also Zugspannung.

In ähnlicher Weise lässt sich dieses Verfahren zur Aufsuchung der Spannungen in allen übrigen Constructionstheilen unseres Trägers anwenden. Es ist auch leicht, es für die Fälle zu modificiren, wo nicht mehr alle Constructionstheile durch Schnitte erreicht werden können, die bloss drei solcher Theile durchschneiden, wo aber doch die Reihenfolge bei der Bestimmung der Spannungen so gewählt werden kann, dass stets nur in dreien der durch einen Schnitt getroffenen Constructionstheile die Spannungen unbekannt sind.

VI. Abschnitt.

Kräfte im Raume.

§ 56. Drehungsmomente von Kräften im Raume um eine sie kreuzende Axe. — Die Definition, welche wir zu Anfang des vorigen Abschnitts vom Drehungsmomente einer Kraft um einen Punkt gegeben haben, braucht nicht auf Kräfte, die alle in einer Ebene liegen, wie wir sie im vorigen Abschnitt ausschliesslich behandelten, beschränkt zu werden. Jede beliebige Kraft im Raum sucht die Ebene, welche durch sie und einen beliebigen ausser ihr gelegenen Punkt bestimmt ist, um den letzteren zu drehen, und man nennt das Product aus der Kraft in ihre senkrechte Entfernung vom Drehungspunkt, oder den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die Kraft und dessen Spitze der Drehungspunkt ist, das Drehungsmoment der Kraft um den Punkt. Man kann sich dabei auch vorstellen, wie wir das in der Folge immer thun wollen, dass die Drehung der Ebene, insofern sie überhaupt eintritt, um eine Axe erfolge, welche in dem Drehungspunkte senkrecht auf ihr steht, die also auch mit der Kraft, sie kreuzend, einen rechten Winkel bildet. Aber es ist klar, dass eine Kraft im Raum nicht bloss um eine sie rechtwinklig kreuzende Axe eine Drehwirkung auszuüben vermag, sondern um jede, irgend einen Winkel mit ihr bildende, und dass nur eine solche Kraft, die mit der Drehungsaxe in einer Ebene liegt, sei es, dass sie dieselbe schneidet, oder dass sie mit ihr parallel ist, eine Drehung um diese Axe nicht hervorbringen kann.

Es ist leicht, die Drehwirkung einer Kraft, welche eine gegebene Drehungsaxe unter irgend einem schiefen Winkel kreuzt, auf die einer Kraft zurückzuführen, welche mit der Drehungsaxe einen rechten Winkel bildet, also auf das uns bereits geläufige Drehungsmoment um einen Punkt. Sei OO' (Fig. 42) eine gegebene Drehungsaxe und A_1P_1 eine sie unter beliebigem Winkel kreuzende Kraft. Letztere können wir mittelst des Kräfteparallelogramms in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine, A_1Q_1, parallel zur Drehungsaxe ist, während die zweite, A_1T_1, in der durch A_1Q_1 und die gegebene Kraft bestimmten Ebene liegend, senkrecht auf der ersten Componente und somit auch senkrecht auf der Drehungsaxe steht. Erstere Componente kann keine Drehwirkung um die Axe OO' ausüben. Die Drehwirkung der letzteren um dieselbe Axe stimmt aber überein mit derjenigen, welche sie um den Punkt O'' dieser Axe ausübt, vorausgesetzt, dass dies der Durchschnittspunkt einer durch die Componente A_1T_1 senkrecht auf die Drehungsaxe OO' gelegten Ebene mit der

Fig. 42.

Drehungsaxe ist. Nun misst der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $A_1 T_1 O''$ das Drehungsmoment der Componente $A_1 T_1$ um jenen Punkt O'' oder, unserer neuen Auffassung zufolge, um die Axe OO', und da die Componente $A_1 Q_1$ keine Drehwirkung ausüben kann, so sind wir berechtigt, mit jenem doppelten Flächeninhalt zugleich das Drehungsmoment der Kraft P_1 um die Axe OO' zu messen. Berücksichtigt man noch, dass die Componente $A_1 T_1$ auch als Projection $A'_1 P'_1$ der Kraft P_1 auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene EE aufgefasst werden kann, und dass das Dreiecke $A_1 T_1 O''$ gleich dem Dreieck $A'_1 P'_1 O'$ ist, welches jene Projection als Grundlinie und den Durchschnittspunkt O' der Drehungsaxe mit der Ebene EE zur Spitze hat, so folgt hieraus die Definition:

Das Drehungsmoment einer beliebigen Kraft im Raum um eine beliebige, sie kreuzende Axe ist gleich dem Drehungsmoment der Projection dieser Kraft auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene um den Punkt dieser Ebene, in welchem sie von der Drehungsaxe geschnitten wird, also gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, welches jene Projection zur Grundlinie und den Durchschnittspunkt zur Spitze hat. In dem Falle, wo die Kraft mit der Drehungsaxe in einer Ebene liegt, wird entweder ihre Projection auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene ein Punkt, nämlich dann, wenn die Kraft parallel zur Drehungsaxe ist, oder jene Projection geht durch den Durchschnittspunkt der Drehungsaxe mit der Projectionsebene hindurch. In beiden Fällen wird das oben definirte Drehungsmoment um die Drehungsaxe gleich Null.

Denkt man sich nun mehrere beliebige Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ im Raum, welche alle um die Axe OO' zu drehen suchen, so sind ihre Drehungsmomente alle gleich denen ihrer Projectionen auf eine zur Axe senkrechte Ebene um den Durchschnittspunkt der Axe mit der Projectionsebene. Diese letzteren Drehungsmomente summiren sich nach den Sätzen des vorigen Abschnittes einfach ihrem Vorzeichen nach zu einander, und die Summe ist gleich dem Drehungsmoment der Resultante oder des Gegenpaars, welche durch die Vereinigung der Projectionen der Kräfte in der Projectionsebene erhalten werden. Diese Summe kann folglich auf einem der im vorigen Abschnitt angegebenen Wege durch Construction gefunden werden. Sie drückt offenbar das Gesammtdrehungsmoment der gegebenen Kräfte im Raum um die gegebene Drehungsaxe aus.

§ 57. Momentenaxen von Kräften, Resultantenaxe, Axenpolygon. — Das Dreieck $A'_1 P'_1 O'$ (Fig. 42), dessen doppelter Flächeninhalt gleich dem Drehungsmoment der Kraft P_1 im Raum um die Axe OO' ist, kann auch als Projection des Dreiecks $A_1 P_1 O$ aufgefasst werden, das die Kraft P_1 zur Grundlinie und einen beliebigen Punkt O in der Drehungsaxe als Spitze hat. Dieses letztere Dreieck repräsentirt aber mit seinem doppelten Flächeninhalt das Drehungsmoment der Kraft P_1 um den Punkt O oder um die Axe OM_1, welche in dem Punkte O auf der Ebene $A_1 P_1 O$ senkrecht steht. Man erhält folglich aus dem durch ein Dreieck repräsentirten Drehungsmoment einer Kraft um einen beliebigen Punkt dasjenige derselben Kraft um irgend eine durch diesen Punkt gelegte Axe, wenn man ersteres auf eine Ebene, welche senkrecht zu letzterer Axe steht, projicirt.

Nun erleichtern wir uns die graphischen Operationen mit den Momenten bekanntlich wesentlich dadurch, dass wir sie in Linien ausdrücken, indem wir sie auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis reduciren. Dieses reducirte Moment denken wir uns jetzt in dem Fall, wo es sich um das Drehungsmoment einer Kraft $A_1 P_1$ um einen Punkt O handelt, von letzterem Punkte aus auf die Senkrechte aufgetragen, welche in ihm auf der Drehungsebene $A_1 P_1 O$ errichtet werden kann; und um zugleich dem Vorzeichen der Momente, also der Drehrichtung, Rechnung zu tragen, kommen wir überein, jene Senkrechte stets nach der Seite der Drehungsebene hin zu errichten, von welcher aus gesehen die Drehrichtung der Kraft als positiv, also als übereinstimmend mit der des Zeigers einer Uhr erscheint. In Uebereinstimmung damit und mit der oben gegebenen Definition tragen wir das reducirte Drehungsmoment einer Kraft um eine beliebige Axe auf diese letztere in solchem Sinne auf, dass, in entgegengesetzter Richtung auf eine zur Axe senkrechte Ebene hin gesehen, die Drehung

dieser um die Axe rechtsseitig wie vorhin erscheint. Diese auf die Drehungsaxen aufgetragenen reducirten Momente nennt man **Momentenaxen**, in dem einen sowohl wie in dem anderen Fall. Durch dieselben werden die Drehungsmomente ihrer Grösse und Richtung nach vollständig bestimmt. Berücksichtigt man, dass in Fig. 42 die auf obige Weise errichtete Axe OM_1 des Momentes der Kraft P_1 um den Punkt O denselben Winkel mit der Drehungsaxe OO' bildet wie die Ebene des Dreiecks A_1P_1O mit der Projectionsebene EE, so folgt nach der oben ausgesprochenen Beziehung zwischen den beiden Dreiecken A_1P_1O und $A'_1P'_1O'$ der Satz:

Man erhält aus dem Drehungsmomente einer Kraft um einen Punkt dasjenige derselben Kraft um irgend eine durch den Punkt gelegte Axe, wenn man die Axe des ersteren Momentes auf die Drehungsaxe projicirt. Die Projection ist die Axe des Momentes der Kraft um die Drehungsaxe und bestimmt also dasselbe vollständig.

Denken wir uns jetzt wieder mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3... im Raum und einen willkürlichen Punkt O, so sind die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke A_1P_1O, A_2P_2O... die Drehungsmomente dieser Kräfte um den Punkt O. Wir errichten dann auf all' diesen Dreiecksflächen in dem ihnen gemeinschaftlichen Punkt O Senkrechte stets nach derjenigen Seite der betr. Ebene hin, von welcher aus die Drehrichtung der in dieser Ebene liegenden Kraft um den Punkt O als positiv erscheint, und tragen auf diese Senkrechten die reducirten Momente der betr. Kräfte um den Punkt O auf: wir construiren mit einem Worte die Momentenaxen jener Drehungsmomente. Wird dann irgend eine beliebige Drehungsaxe durch O gelegt, so erhält man die Axen der Drehungsmomente der Kräfte um dieselbe, wenn man die vorhin construirten Momentenaxen auf die Drehungsaxe projicirt. Die algebraische Summe dieser Projectionen gibt offenbar das Gesammtdrehungsmoment der Kräfte um die Drehungsaxe.

Diese algebraische Summe kann man auf die Art erhalten, wie am Ende des vorigen § aus einander gesetzt. Man kann sie sich aber auch auf folgende Weise verschaffen. Denkt man sich die Axen der Drehungsmomente der Kräfte um den Punkt O von diesem letzteren aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach in beliebiger Ordnung so an einander gereiht, dass sich jede folgende mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der vorhergehenden anschliesst, dann ist die Projection der Schlusslinie d. h. der Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der letzten der so an einander gereihten Axen auf jede durch den Punkt O gelegte Drehungsaxe gleich der algebraischen Summe der Projectionen der einzelnen Momentenaxen auf die Drehungsaxe. Jene Schlusslinie kann also offenbar als Axe des Momentes einer Kraft um den Punkt O betrachtet werden, welche um jede durch O gelegte Axe genau dieselbe Drehwirkung ausübt wie die Kräfte P_1, P_2, P_3... insgesammt. Deshalb heisst man diese Schlusslinie mit Recht die **Resultantenaxe** jener einzelnen, und aus dem Obigen geht hervor, dass sie aus diesen letzteren ganz ebenso durch Construction eines Polygons, des „**Axenpolygons**", erhalten werden kann, wie wir in § 10 aus Kräften, welche nach beliebigen Richtungen des Raumes hin an einem und demselben Angriffspunkt wirken, durch Construction des Kräftepolygons die Resultante jener Kräfte fanden.

§ 58. Momentenaxen der Gegenpaare, Resultantenaxe und Resultanten-Gegenpaar. — Ein Gegenpaar hat um jeden Punkt der Ebene, in der es liegt, also auch um jede Axe, die auf seiner Ebene senkrecht steht, das nämliche Drehungsmoment, gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, das die eine seiner Kräfte zur Grundlinie hat, und dessen Spitze in der anderen Kraft liegt. Es kann in seiner Ebene verlegt und dabei seine Kräfte und die Entfernung derselben, sein Arm, verändert werden, wie man will, wenn nur sein Drehungsmoment, also der Flächeninhalt jenes Dreiecks, unverändert bleibt.

Wir können jetzt hinzufügen, dass ein Gegenpaar auch in eine parallele Ebene verlegt werden darf, ohne dass sich seine Wirkung ändert, ganz entsprechend seiner Auffassung als unendlich kleine

Kraft, die in der unendlich fernen Geraden liegt, welche einer Schaar paralleler Ebenen gemeinschaftlich ist. — In der That, seien P, —P (Fig. 43) die beiden gleichen, parallelen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte eines Gegenpaares, und verlegen wir dieselben, ohne vorläufig ihre Richtung und Grösse, also auch ihre Entfernung zu ändern, in eine parallele Ebene, nach P′, —P′, so kann man sich irgend eine dritte, die beiden vorigen schneidende Ebene denken, welche die Linien, in denen die vier Kräfte P, —P, P′, —P′ liegen, in den Punkten A, B, A′, B′ schneiden, die wir als Angriffspunkt jener vier Kräfte betrachten können. Diese vier Punkte bilden immer die Ecken eines Parallelogramms. Denkt man sich nun zwei, den Kräften P′, —P′ bezw. gleiche und in denselben geraden Linien entgegengesetzte Kräfte P″, —P″ mit den Angriffspunkten in B′ und A′, so bilden dieselben ein Gegenpaar, das dem P′, —P′ offenbar das Gleichgewicht hält. Dasselbe lässt sich von den beiden Gegenpaaren P″, —P″ und P, —P behaupten. In der That geben die beiden parallelen, gleichen und gleichgerichteten Kräfte P und P″, für sich zusammengesetzt, eine Resultante P + P″ gleich ihrer Summe, parallel mit ihnen und gleichgerichtet, welche durch den Halbirungspunkt C der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte hindurchgeht. Eine dieser gleiche, aber entgegengesetzte Resultante geben die beiden Kräfte —P, —P″, und da dieselbe durch den Halbirungspunkt der Verbindungslinie der beiden Punkte B und A′ hindurchgehen muss, der mit dem vorigen Punkt C zusammenfällt, so halten sich beide Resultanten das Gleichgewicht und folglich auch die beiden Gegenpaare P, —P und P″, —P″. Da nun von den beiden Kräften P″, —P″ sowohl dem Gegenpaar P, —P, als auch dem P′, —P′ das Gleichgewicht gehalten wird, so haben letztere beide Paare offenbar gleiche Wirkung.

Fig. 43.

Denkt man sich in irgend einer der Lagen eines Gegenpaars, die es nach Obigem erhalten kann, einen Momentenpunkt in der einen seiner Kräfte angenommen, so ist das Drehungsmoment der anderen Kraft um diesen Punkt der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich dem des Gegenpaars. Es liegt also nahe, die Drehungsmomente der Gegenpaare ganz ebenso durch Momentenaxen darzustellen wie diejenigen von Kräften um Drehungspunkte. Man errichtet zu diesem Zwecke in irgend einem Punkte der Ebene des Gegenpaars nach derjenigen Seite der Ebene hin, von welcher aus gesehen die Drehrichtung des Gegenpaars positiv erscheint, eine Senkrechte auf jener Ebene und trägt auf dieser vom Fusspunkte aus eine Strecke, gleich dem reducirten Moment des Gegenpaars, ab. Diese Strecke nennen wir die M o m e n t e n a x e oder schlechtweg A x e des Gegenpaars, und es ist klar, dass wegen der Veränderungen, die mit einem Gegenpaar vorgenommen werden können, diese Axe in jede beliebige Lage gebracht werden darf, wenn nur ihre Grösse, ihre Richung und ihr Sinn die gleichen bleiben.

Wie aber eine Kraft nicht bloss um eine sie r e c h t winklig kreuzende Axe drehen kann, sondern um jede andere, die einen schiefen Winkel mit ihr bildet, so kann auch ein Gegenpaar um jede Axe drehen, wenn dieselbe nur nicht in seiner Ebene liegt oder parallel dazu ist. Es ist leicht, aus dem Drehungsmoment eines Gegenpaars nach bisheriger Definition, also für eine zu seiner Ebene senkrechte Drehungsaxe, das für eine andere Axe abzuleiten, die unter schiefem Winkel zu jener Ebene geneigt ist. Denkt man sich ein Gegenpaar P, —P so verlegt, dass der Angriffspunkt der einen seiner Kräfte, etwa der Kraft —P, in irgend einen Punkt O der willkürlich angenommenen Drehungsaxe fällt, so hat diese Kraft gar keine Drehwirkung um letztere und deshalb ist die Drehwirkung des Gegenpaars gleich derjenigen der anderen Kraft P um die Drehungsaxe. Wir können daher unter dem Drehungsmoment des Gegenpaars um die Drehungsaxe dasjenige der Kraft P um dieselbe Axe verstehen, welch' letzteres, bezw. seine Axe, erhalten wird, wenn man die Momentenaxe

der Kraft für den Punkt O auf die Drehungsaxe projicirt. Aber das Drehungsmoment der Kraft P um den Punkt O ist nichts anderes als das des Gegenpaars selbst, und daraus folgt: *Man erhält das Drehungsmoment eines Gegenpaars um irgend eine willkürliche Drehungsaxe, wenn man seine Momentenaxe auf die letztere projicirt.* Diese Projection ist die *Axe* des gesuchten Drehungsmomentes, darunter wie bisher die auf die Drehungsaxe aufgetragene Strecke verstanden, welche der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich dem auf die Momentenbasis reducirten Drehungsmoment ist.

Hat man nun mehrere Gegenpaare $(P_1, -P_1)$, $(P_2, -P_2)$, $(P_3, -P_3)\ldots$, welche in beliebigen Ebenen des Raumes liegen, so kann man dieselben so verlegen, dass alle ihre Ebenen und je die eine von den Kräften, aus denen sie bestehen, etwa die Kräfte $-P_1, -P_2, -P_3\ldots$, durch den nämlichen willkürlichen Punkt O des Raumes gehen. Ebenso kann man ihre Axen parallel verlegen, bis ihre Anfangspunkte alle in den Punkt O zu liegen kommen; sie stehen dann in diesem Punkte senkrecht auf den Ebenen der verlegten Gegenpaare, denen sie angehören, und können auch als Axen der Drehungsmomente der Kräfte P um den Punkt O angesehen werden. Denken wir uns irgend eine Drehungsaxe durch den letzteren Punkt gelegt, so ist die algebraische Summe der Projectionen jener Momentenaxen auf die Drehungsaxe gleich der algebraischen Summe der auf eine und dieselbe Basis reducirten Drehungsmomente von den in obiger Weise verlegten Kräften $P_1, P_2, P_3\ldots$, also der Gegenpaare $(P_1, -P_1)$, $(P_2, -P_2)$, $(P_3, -P_3)\ldots$ um die Drehungsaxe.

Man kann aber offenbar jene algebraische Summe der Projectionen auch dadurch erhalten, dass man, wie oben aus den Axen der Kräfte, so jetzt aus den Momentenaxen der Gegenpaare ein *Axenpolygon* construirt und dessen Schlusslinie d. h. die Verbindungslinie des Anfangspunktes der ersten mit dem Endpunkte der letzten abgetragenen Axe auf die Drehungsaxe projicirt. Dies gilt so für alle durch den Punkt O möglichen Drehungsaxen. Deshalb kann man sich jene Schlusslinie auch als die Momentenaxe eines Gegenpaars vorstellen, das um jede durch den Punkt O gehende Drehungsaxe dasselbe Drehungsmoment hat wie die gegebenen Gegenpaare zusammen. Man kann also mit Recht jene Schlusslinie wieder *Resultantenaxe* nennen. Das ihr zugehörige Gegenpaar heisst das *Resultanten-Gegenpaar* der gegebenen, und in der That kann leicht erwiesen werden, dass es diese vollständig in ihrer Wirkung ersetzen kann.

Um diesen Beweis zu führen, denken wir uns zunächst zwei Gegenpaare, welche in den beiden sich in der Linie AB schneidenden Ebenen JJ und KK (Fig. 44) gelegen sind. Wir verlegen und verändern sie in diesen Ebenen so, dass sie eine beliebige Strecke AB jener Durchschnittslinie als Arm erhalten, auf welchem in den Endpunkten A und B die Kräfte P_1 und $-P_1$, P_2 und $-P_2$, in ihren betr. Ebenen liegend, senkrecht stehen. Dann liegen die Kräfte P_1 und P_2 sowohl, als auch die Kräfte $-P_1$ und $-P_2$ je in einer Ebene, die in dem Punkte A bezw. B senkrecht auf der Schnittlinie AB steht. Die aus den Kräften P_1 und P_2 vermittest des Kräfteparallelogramms construirte Resultante R ist offenbar gleich und parallel, aber entgegengesetzt der Resultante $-R$ aus den Kräften $-P_1$ und $-P_2$. Beide Resultanten bilden daher wieder ein Gegenpaar, dessen Wirkung diejenige der beiden gegebenen vollständig und überall ersetzen kann, und das daher das Resultanten-Gegenpaar derselben genannt werden muss. Denken wir uns nun, es sei die Strecke AB gleich der Momentenbasis genommen, und errichten wir in dem Punkte A Senkrechte auf den Ebenen JJ und KK nach derjenigen ihrer Seiten hin, von der aus die Drehrichtung der in ihnen gelegenen Gegenpaare

Fig. 44.

als positiv erscheint, dann sind die auf diese Senkrechten aufzutragenden Axen AM_1 und AM_2 der Gegenpaare bezw. gleich den Kräften P_1 und P_2. Die Diagonale AN des über jenen Axen construirten Parallelogramms ist folglich gleich der Kraft R und steht senkrecht auf der durch die Kräfte R und —R bestimmten Ebene des Resultanten-Gegenpaars. Sie ist folglich die Axe dieses letzteren. Für jede andere Momentenbasis erhält man Axen, die denen AM_1, AM_2 und AN proportional sind, und deshalb lässt sich, in Berücksichtigung der Veränderungen, die mit einem Gegenpaar vorgenommen werden können, folgender Satz aussprechen:

Wenn man die Axen irgend zweier Gegenpaare von einem beliebigen Punkte des Raumes aus ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach aufträgt und über den so erhaltenen Linien ein Parallelogramm construirt, so ist die von jenem Punkte ausgehende Diagonale desselben der Grösse, Richtung und dem Sinne nach als Axe eines Gegenpaars zu betrachten, das, hierdurch vollkommen bestimmt, die gegebenen in ihrer Wirkung vollständig und überall ersetzen kann und deshalb Resultanten-Gegenpaar genannt wird. Seine Axe heisst Resultantenaxe. Sie kann auch dadurch erhalten werden, dass man von einem beliebigen Punkt aus die Axen der gegebenen Gegenpaare ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach hinter einander abträgt, die zweite mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der ersten anschliessend, und dass man dann jenen Ausgangspunkt mit dem Endpunkte der zweiten Kraft verbindet.

Dieses letztere Verfahren lässt sich nun genau so wie bei den Kräften im Raume im § 10 auf beliebig viele, in beliebigen Ebenen gelegene Gegenpaare ausdehnen. Man erhält die Axe des Resultanten-Gegenpaars, wenn man aus den Axen der gegebenen in bekannter Weise ein Polygon im Raume construirt und darin den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkt der letzten Axe verbindet. Das dadurch bestimmte Gegenpaar kann die gegebenen vollständig ersetzen, und sein Drehungsmoment um jede Drehungsaxe ist nach Obigem gleich der algebraischen Summe der Drehungsmomente der gegebenen Gegenpaare um dieselbe Axe.

In ganz ähnlicher Weise wie bei den Kräften kann natürlich auch die Zerlegung eines Gegenpaars in zwei oder mehrere Componentenpaare vorgenommen werden.

§ 59. **Zusammensetzung beliebiger Kräfte im Raume.** — Mit Hülfe der obigen Sätze ist es nun leicht, beliebige Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ im Raum, deren Angriffspunkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$ irgendwie gelegen sein mögen, mit einander zu vereinigen. Man nimmt willkürlich einen fixen Punkt O an, nach welchen man die gegebenen Kräfte mit ihren Angriffspunkten verlegt, indem man ihre Grösse, Richtung und ihren Sinn ungeändert lässt. Dann erhält man neben den verlegten, in O angreifenden Kräften eben so viele Gegenpaare, die in den Ebenen der Dreiecke A_1P_1O, $A_2P_2O \ldots$ liegen, deren Drehungsmomente durch den doppelten Flächeninhalt jener Dreiecke repräsentirt werden, und deren Drehrichtung der Kreispfeil angibt, der in jene Dreiecke gezeichnet werden kann und seinem Sinne nach mit der bezüglichen Kraft übereinstimmt. Die in O angreifenden Kräfte können mittelst des Kräftepolygons im Raum zu einer Resultante R vereinigt werden. Um ebenso die Gegenpaare zu vereinigen, denke man sich im Punkte O auf den Ebenen der Dreiecke A_1P_1O, $A_2P_2O \ldots$ Senkrechte nach der Seite hin errichtet, von der aus gesehen die Drehrichtung der Gegenpaare oder der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ um den Punkt O positiv wie die des Zeigers einer Uhr erscheint; auf diesen Senkrechten trage man die reducirten Momente der Gegenpaare oder der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ um den Punkt O auf; man construire also mit einem Wort die Axen der Gegenpaare oder der Drehungsmomente der Kräfte um den Punkt O. Aus diesen Axen zeichnet man dann das Axenpolygon. Die Schlusslinie desselben ist die Resultantenaxe U, welche das Gegenpaar vollständig bestimmt, das dieselbe Wirkung hat wie diejenigen, die man neben den nach O verlegten Kräften erhalten hatte, zusammengenommen. Jene Resultante R und dieses Gegenpaar

oder diese Resultantenaxe U sind es also, auf welche die gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3... zurückgeführt werden können.

Bei der Ausführung dieser Constructionen sind natürlich die Kräfte P_1, P_2, P_3... durch ihre Risse auf zwei Tafeln zu geben. Aus diesen erhält man dann die Risse des Kräftepolygons der nach dem Punkt O verlegten Kräfte, indem man von den Rissen dieses Punktes aus in jeder der beiden Tafeln die Polygone aus den Rissen der Kräfte construirt. Die Schlusslinien dieser Polygone sind die Risse der Resultante R, welche dadurch vollständig bestimmt ist. Um die Resultantenaxe U zu finden, kann man verschiedene Wege einschlagen.

a) Man kann die Projectionen derselben auf drei, durch den Punkt O gehende, nicht in einer Ebene liegende Drehungsaxen aufsuchen, durch welche drei Projectionen sie vollständig bestimmt ist. Für jede dieser Drehungsaxen ist die Projection der Resultantenaxe auf sie gleich der algebraischen Summe der Projectionen der Componentenaxen, also gleich der algebraischen Summe der reducirten Drehungsmomente der Kräfte P_1, P_2, P_3... um jene Drehungsaxe. Nimmt man also jene drei Axen bezw. senkrecht auf der ersten, zweiten und auf einer dritten Projectionstafel, welche senkrecht auf einer oder auf den beiden vorhergehenden steht, so ist die Projection der Resultantenaxe auf jede dieser drei Axen gleich der algebraischen Summe der reducirten Drehungsmomente, welche die Risse der Kräfte auf derjenigen Tafel, auf der die betr. Axe senkrecht steht, um den Fusspunkt dieser Axe haben. Diese algebraischen Summen können also auf einem der in den §§ 46 und 52 gezeigten Wege gefunden werden.

Wir haben diesen Gang in Fig. 18 Taf. V befolgt, um beispielsweise die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 zu vereinigen, deren Risse $A'_1 P'_1$, $A'_2 P'_2$, $A'_3 P'_3$, dann $A''_1 P''_1$, $A''_2 P''_2$, $A''_3 P''_3$ in zwei auf einander senkrecht stehenden Tafeln als gegeben vorausgesetzt werden. Die Polygone $0' 1' 2' 3'$, $0'' 1'' 2'' 3''$, welche aus diesen Rissen von den Rissen $0'$ und $0''$ des beliebigen Punktes O aus construirt wurden, bestimmen durch ihre Schlusslinien $0' 3'$ und $0'' 3''$ die Resultante R, deren Risse eben diese Schlusslinien sind.

Um die Resultantenaxe zu finden, hat man die algebraische Summe der reducirten Drehungsmomente der Kräfteprojectionen in der ersten Tafel um den Punkt $0'$, derjenigen in der zweiten Tafel um den Punkt $0''$ aufzusuchen und in gleicher Weise in einer dritten Tafel zu verfahren, die wir senkrecht auf den beiden vorhergehenden annehmen, und für welche die Risse der Kräfte, nämlich $A'''_1 P'''_1$, $A'''_2 P'''_2$, $A'''_3 P'''_3$, und der des Punktes O, nämlich $0'''$, aus den vorhandenen beiden Rissen leicht gefunden werden können. Den in § 52 angegebenen Weg befolgend, nehmen wir in jedem der Polygone $0' 1' 2' 3'$ und $0'' 1'' 2'' 3''$, sowie in dem in der dritten Tafel erst zu zeichnenden $0''' 1''' 2''' 3'''$ einen Pol C', bezw. C'' und C''' an, dessen Entfernung von der betr. Schlusslinie gleich der Momentenbasis ist. Für diese Pole construiren wir dann die Seilpolygone $0' I' II' III' IV'$, $0'' I'' II'' III'' IV''$, $0''' I''' II''' III''' IV'''$, deren äusserste Seiten auf den durch die Momentenpunkte $0'$, $0''$, $0'''$ gezogenen Parallelen zu den betr. Resultanten der Kräfterisse, also auf den Linien $0' 3'$, $0'' 3''$, $0''' 3'''$ selbst, Abschnitte $m'_0 m'_3$, $m''_0 m''_3$, $m'''_0 m'''_3$ machen, welche gleich den reducirten Momenten jener Resultanten um die Punkte $0'$, $0''$, $0'''$ sind, oder gleich den algebraischen Summen der reducirten Drehungsmomente der Kräfterisse auf den drei Tafeln um jene Momentenpunkte. Die Vorzeichen dieser Summen bestimmen sich aus den Drehrichtungen der betr. Resultanten der Kräfterisse sehr leicht. Die Resultanten sind ihrer Grösse, Richtung und ihrem Sinne nach durch die Schlusslinien $0' 3'$, $0'' 3''$, $0''' 3'''$ repräsentirt und gehen durch den betr. Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten hindurch.

In einem Sinne, der jenem Vorzeichen entspricht, sind dann die Abschnitte $m'_0 m'_3$, $m''_0 m''_3$, $m'''_0 m'''_3$ von dem Punkte O aus auf die drei Drehungsaxen aufzutragen, welche durch diesen Punkt gelegt wurden und auf den drei Tafeln senkrecht stehen. Die so aufgetragenen Abschnitte sind die Projectionen der Resultantenaxe U auf die drei Drehungsaxen und projiciren sich selbst wieder auf

jede der drei Tafeln, auf der sie nicht senkrecht stehen, in ihrer wahren Grösse. Macht man also $0'U'_2$ und $0''U''_3$ beide gleich $m'''_0 m'''_3$ (nach links aufgetragen, weil die dritte Tafel, von dieser Seite angesehen, von den in ihr liegenden Kräfterissen oder deren Resultante in positivem Sinne gedreht wird), dann $0''U''_1$ gleich $m'_0 m'_3$ (nach unten getragen, weil die erste Tafel, von oben gesehen, von den in ihr liegenden Kräfterissen oder deren Resultante links gedreht wird), endlich $0'U'_3$ gleich $m''_0 m''_3$ (nach hinten getragen, weil die zweite Tafel, von vorn gesehen, von den in ihr liegenden Kräfterissen linksseitig gedreht wird), so sind die Diagonalen U' und U'' der Parallelogramme über den Stücken $0'U'_2$ und $0'U'_3$, bezw. $0''U''_1$ und $0''U''_3$ die Risse der gesuchten Resultantenaxe auf der ersten und zweiten Tafel. Diese Axe ist hierdurch völlig bestimmt.

b) Die zweite Methode, die Resultantenaxe U zu finden, besteht darin, dass man das Polygon aus den Axen der Gegenpaare oder der Drehungsmomente der Kräfte P_1, P_2, P_3... um den Punkt O selbst construirt. Wir haben sie in Fig. 20 Taf. VI bei der Vereinigung der nämlichen drei Kräfte P_1, P_2, P_3, die wir in Fig. 18 Taf. V behandelten, angewendet. Von diesen Kräften wurden wieder ihre Risse auf zwei Tafeln, nämlich $A'_1P'_1$, $A'_2P'_2$, $A'_3P'_3$, dann $A''_1P''_1$, $A''_2P''_2$, $A''_3P''_3$ als gegeben vorausgesetzt. Aus denselben sind die Risse $0'\,1'\,2'\,3'$, $0''\,1''\,2''\,3''$ des Kräftepolygons für die nach dem Punkt O verlegten Kräfte wie oben construirt worden, und man hat auf diese Weise die Resultante R jener Kräfte, bezw. ihre Risse R' und R'', gleich den Schlusslinien $0'3'$ und $0''3''$ gefunden.

Die Axen stehen senkrecht auf den Ebenen der Dreiecke A_1P_1O, A_2P_2O, A_3P_3O. Zeichnet man also Linien, die in diesen Dreiecksebenen liegen, und deren zweite Risse parallel zur Projectionsaxe sind, so müssen senkrecht auf den ersten Rissen S'_1, S'_2, S'_3 derselben die ersten Risse der Momentenaxen stehen. Die zweiten Risse derselben stehen ebenso senkrecht auf den zweiten Rissen T''_1, T''_2, T''_3 von Linien, die in jenen Dreiecksebenen liegen, und deren erste Risse parallel zur Projectionsaxe sind. Hierdurch sind die Richtungen der Momentenaxen völlig bestimmt. Um ihre Grösse zu erhalten, müsste man eigentlich die wahre Grösse der Dreiecke A_1P_1O, A_2P_2O, A_3P_3O aufsuchen und auf eine gemeinschaftliche Momentenbasis reduciren. Diese etwas unbequeme Construction kann man aber umgehen, wenn man den Satz benützt, dass die Projection irgend einer der Momentenaxen auf eine, zur ersten Tafel z. B., senkrechte Drehungsaxe gleich ist der Axe des Drehungsmomentes des Risses der Kraft auf der ersten Tafel um den Fusspunkt jener Drehungsaxe. Legt man also die letztere durch den Punkt O senkrecht auf die erste Tafel, so ist $0'$ ihr Fusspunkt und die Projectionen der Momentenaxen auf sie sind gleich den reducirten Momenten, welche durch die doppelten Dreiecksflächen $A'_1P'_1 0'$, $A'_2P'_2 0'$, $A'_3P'_3 0'$ repräsentirt werden. Ebenso sind die Projectionen der Momentenaxen auf eine durch O senkrecht auf die zweite Tafel gelegte Drehungsaxe gleich den reducirten Momenten, die durch die doppelten Dreiecksflächen $A''_1P''_1 0''$, $A''_2P''_2 0''$, $A''_3P''_3 0''$ dargestellt sind.

Die Reduction der oben genannten Momente wurde in Fig. 20 Taf. VI auf die im § 46 angegebene erste Methode vorgenommen, indem man die betr. Kräfterisse mit einem Kreise um $0'$ bezw. $0''$, dessen Radius gleich der Momentenbasis ist, durchschnitt etc. Man erhielt so in der ersten Tafel die Stücke h'_1, h'_2, h'_3, in der zweiten die Stücke h''_1, h''_2, h''_3 als reducirte Momente. Erstere drei Stücke sind aber nicht bloss die Projectionen der Momentenaxen auf eine zur ersten Tafel senkrecht gelegte Drehungsaxe, sondern auch die Projectionen der zweiten Risse der Momentenaxen auf den zweiten Riss jener Drehungsaxe, also auf eine durch $0''$ gelegte Senkrechte zur Projectionsaxe. Aehnliches gilt für die Stücke h''_1, h''_2, h''_3. Hiernach lassen sich nun die Risse des vom Punkt O aus gezogenen Axenpolygons auf den beiden Tafeln leicht wie folgt construiren.

In der ersten Tafel trägt man von $0'$ aus auf einer zur Projectionsaxe senkrechten Linie, oder besser, der grösseren Deutlichkeit wegen, auf einer seitwärts gezogenen Senkrechten zur Projectionsaxe von einem $0'$ entsprechenden Punkt q'_0 aus die reducirten Momente h''_1, h''_2, h''_3 ihrer Grösse und ihrem

Vorzeichen nach hinter einander ab. Man macht also $q'_0 q'_1$ gleich h''_1 und zwar nach rückwärts, weil die zweite Tafel, von vorn gesehen, von dem Kräfteriss $A''_1 P''_1$ im negativen Sinne um $0''$ zu drehen gesucht wird; $q'_1 q'_2$ macht man gleich h''_2 und trägt es aus demselben Grunde nach rückwärts; endlich $q'_2 q'_3$ ist gleich h''_3 zu machen und vorwärts aufzutragen, weil die zweite Tafel, von vorn gesehen, von dem Kräfteriss $A''_3 P''_3$ im positiven Sinne gedreht wird. In der zweiten Tafel ist ähnlich $q''_0 q''_1$ gleich h'_1 gemacht und abwärts getragen, weil $A'_1 P'_1$ die erste Tafel, von oben gesehen, im negativen Sinne dreht; ebenso sind $q''_1 q''_2$ gleich h'_2 und $q''_2 q''_3$ gleich h'_3 der Grösse und dem Vorzeichen nach.

Nun hat eine durch $0'$ zu S'_1 gezogene Senkrechte die Richtung des Risses der ersten Momentenaxe in der ersten Tafel; seine Grösse wird von einer durch q'_1 gezogenen Parallelen zur Projectionsaxe in u'_1 abgeschnitten. Von u'_1 aus ist alsdann eine Senkrechte zu S'_2 zu ziehen und dieselbe mit einer durch q'_2 gezogenen Parallelen zur Projectionsaxe in u'_2 zu durchschneiden. Endlich zieht man durch u'_2 eine Senkrechte auf S'_3 und durchschneidet sie mit einer durch q'_3 gezogenen Parallelen zur Projectionsaxe. So erhält man den ersten Riss $0' u'_1 u'_2 u'_3$ des Axenpolygons und in dessen Schlusslinie $0' u'_3$ den ersten Riss U' der Resultantenaxe. In ganz gleicher Weise kann in der zweiten Tafel der zweite Riss $0'' u''_1 u''_2 u''_3$ des Axenpolygons und damit der zweite Riss der Resultantenaxe U'' gleich $0'' u''_3$ construirt werden.

§ 60. Die Resultante R und das Resultanten-Gegenpaar mit der Momentenaxe U, welche wir nach den beiden im vorigen § angegebenen Methoden als Resultat der Zusammensetzung von Kräften im Raume erhalten haben, lassen sich d a n n noch weiter mit einander vereinigen, wenn U senkrecht auf R steht, wenn also die Resultante in der Ebene des Gegenpaares liegt oder auch nur parallel dazu ist, in welchem Falle die Ebene mit dem Gegenpaar parallel verlegt werden kann, bis sie durch R geht. Das Resultat dieser Vereinigung ist eine der Kraft R an Grösse, Richtung und Sinn gleiche Kraft, gegen jene in der Ebene des Gegenpaars parallel verschoben um ein Stück, wie es dem Drehungsmoment des Gegenpaars, also der Grösse von U entspricht. In diesem speciellen Fall lassen sich also die gegebenen Kräfte im Raume in eine einzige Resultante zusammensetzen, eben jene parallel verschobene Kraft R.

Der Punkt O, in welchen nach dem im vorigen § kennen gelernten Verfahren die gegebenen Kräfte parallel mit sich selbst verlegt wurden, konnte willkürlich gewählt werden. Von der Lage desselben ist Grösse, Richtung und Sinn der Resultante R ganz unabhängig; dieselbe ist stets gleich der Schlusslinie des Polygons, das von einem beliebigen Anfangspunkte an aus den gegebenen Kräften gezeichnet wird. Wir werden sie schlechtweg die R e s u l t a n t e des gegebenen Kräftesystems nennen. Das zu ihr gehörige Gegenpaar, oder dessen Momentenaxe U hängt dagegen wesentlich von der Lage des Punktes O ab; es entsteht daher zunächst die Frage, ob es vielleicht möglich wäre, diesen Punkt so zu wählen, dass U senkrecht auf R zu stehen kommt? Aber eine einfache Ueberlegung zeigt, dass dies für k e i n e Lage des Punktes eintreten wird, wenn es bei i r g e n d e i n e r nicht stattfindet. Denn da für einen anderen Punkt O_1 statt O die Resultante R an Grösse, Richtung und Sinn dieselbe bleibt, so kann man aus dem für den Punkt O gefundenen Resultat das für O_1 giltige erhalten, wenn man R parallel mit sich selbst von O nach O_1 verlegt und das hierdurch hinzukommende Gegenpaar, dessen Momentenaxe U_2 heissen möge, mit U vereinigt. Nun steht U_2 senkrecht auf der Ebene, in welcher R verschoben wurde, also senkrecht auf R selbst; mit U, welches der Voraussetzung nach einen schiefen Winkel mit R bildet, vereinigt, kann sie also niemals eine Resultantenaxe geben, die auf R senkrecht steht.

Die Ebene des Gegenpaars mit der Momentenaxe U kann senkrecht auf diese stets durch den Punkt O gelegt werden, durch den auch die zugehörige Resultante geht. Wird das Gegenpaar in dieser Ebene durch zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte Q und Q_1 (Fig. 45) von gleicher Grösse dargestellt, von denen die eine, Q_1, durch den Punkt O geht, so kann diese mit der Resultante R,

die im Allgemeinen nicht in dieser Ebene gelegen ist, in eine Resultante S vereinigt werden, die ebenfalls nicht in dieser Ebene liegt. Diese bildet dann mit der anderen Kraft des Gegenpaars ein Paar sich kreuzende Kräfte (Q, S), durch welche das gegebene Kräftesystem im Raum auch ersetzt werden kann. Da der Punkt O beliebig gewählt werden konnte, ebenso Grösse, Richtung und Sinn der Kräfte des Gegenpaars, wenn nur dessen (reducirtes) Drehungsmoment gleich der Momentenaxe U blieb, so kann auf unendlich mannigfaltige Weise die Wirkung eines Systems von Kräften im Raume durch ein Paar sich kreuzende Kräfte ersetzt werden, die wir einander *zugeordnete* oder *entsprechende Kräfte* nennen wollen.

Fig. 45.

Alle diese Paare sich kreuzende Kräfte, welche ein und dasselbe Kräftesystem im Raum in seiner Wirkung ersetzen können, stehen in einfachem Zusammenhange unter einander. Wenn man sie auf eine zur Resultante R des Kräftesystems senkrechte Ebene, die sog. *orthographische Ebene*, orthogonal projicirt, so sind ihre Projectionen je ein Paar gleiche und parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, also Gegenpaare. Denn diese Projectionen Q', Q'_1 (Fig. 45) sind nichts anderes als die Projectionen der Kräfte Q, Q_1 des Gegenpaars, dessen Axe U war, auf dieselbe orthographische Ebene, da die Projection der Resultante R auf diese Ebene Null ist. Die Momentenaxe jedes solchen Gegenpaars in der orthographischen Ebene ist offenbar die othogonale Projection der Momentenaxe U auf die Resultante R. Ausserdem folgt daraus:

Die Parallelebenen, welche durch irgend ein Paar sich kreuzende Kräfte gelegt werden, die ein gegebenes System von Kräften im Raum ersetzen, sind stets zugleich parallel zur Resultante R dieses Kräftesystems.

§ 61. Centralaxe, Centralresultante und Minimal-Momentenaxe eines Systems beliebiger Kräfte im Raume. — Die Resultante R und das Resultanten-Gegenpaar U, welche im § 59 als Resultat der Vereinigung beliebiger Kräfte im Raume erhalten wurden, lassen sich noch auf folgende Weise umgestalten:

Man zerlege U in zwei Componentenaxen, von denen die eine, U_0, in der Richtung von R liegt, während die andere, U_1, senkrecht darauf steht. Letztere gehört dann einem Gegenpaar an, das mit der Resultante R in einer Ebene liegt und also mit ihr vereinigt werden kann, indem man sie parallel mit sich selbst in jener Ebene um ein geeignetes Stück verschiebt, ohne ihren Sinn und ihre Grösse zu ändern. So bleibt also noch die verschobene Kraft R_0 und die Componententaxe U_0 übrig, welch' letztere dieselbe Richtung wie R_0 hat, also auch in die gerade Linie, in welcher R_0 wirkt, verlegt werden kann und einem Gegenpaar angehört, dessen Ebene senkrecht auf R_0 steht. Es lässt sich leicht beweisen, dass dieses Gegenpaar unter allen denen, welche durch Vereinigen des gegebenen Systems von Kräften erhalten werden können, das kleinste Drehungsmoment, also die kleinste Axe hat. In der That fügt jede parallele Versetzung der Kraft R_0 zu dem schon vorhandenen Gegenpaar mit der Axe U_0 ein zweites hinzu, das in der Ebene liegt, in welcher jene Versetzung vorgenommen wurde, dessen Axe also senkrecht auf U_0 steht. Die Vereinigung beider Gegenpaare gibt allemal ein solches, dessen Axe grösser als U_0 ist. Daraus geht zugleich hervor, dass die Lage von R_0, deren Grösse, Richtung und Sinn schon das Kräftepolygon der gegebenen Kräfte ergab, und zu welcher ein Gegenpaar U_0 gehört, dessen Axe mit R_0 zusammenfällt, eine völlig bestimmte ist; denn jede parallele Verschiebung von R_0 ruft ein Gegenpaar hervor, das mit dem

U_0 zusammengesetzt ein solches gibt, dessen Axe gewiss nicht wieder mit R_0 zusammenfällt. Ebenso ist U_0 für jedes gegebene Kräftesystem eine vollständig bestimmte Grösse.

Man nennt die gerade Linie, in welcher jene Kraft R_0 liegt, die Centralaxe des gegebenen Systems von Kräften im Raum. R_0 selber wollen wir Centralresultante nennen und die Axe U_0 des zu ihr gehörigen Gegenpaars, der oben abgeleiteten Eigenschaft halber, die Minimal-Momentenaxe. Sie wurden in Fig. 18 Taf. V und Fig. 20 Taf. VI für die dort als gegeben vorausgesetzten drei Kräfte construirt. Um zunächst die oben angegebene Zerlegung der Resultantenaxe U vorzunehmen, legten wir durch das Ende derselben eine Ebene senkrecht auf die Kraft R und suchten den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Linie, in welcher letztere Kraft liegt. Die Risse dieses Schnittpunktes sind v' und v'', und daher sind $0'v'$ und $0''v''$ die Risse der Componentenaxe U_0, $v'u_3'$ und $v''u_3''$ diejenigen der Axe U_1. Letztere, welche einem Gegenpaar angehört, das mit der Kraft R in einer Ebene liegt, ist mit dieser Kraft zu vereinigen, indem man dieselbe in jener Ebene parallel mit sich selbst um ein geeignetes Stück verschiebt. Dabei werden die Projectionen R' und R'' parallel mit sich selbst nach R_0' und R_0'' derart versetzt, dass das reducirte Drehungsmoment von R_0' um $0'$ der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich der Projection von U_1 auf eine in $0'$ zur ersten Tafel senkrecht errichtete Drehungsaxe, also gleich der Projection von $v''u_3''$ auf eine zur Projectionsaxe senkrechte Linie ist, und dass ebenso das reducirte Drehungsmoment von R_0'' um $0''$ gleich der Projection von $v'u_3'$ auf eine zur Projectionsaxe senkrechte Linie wird.

Auf diese Art können R_0' und R_0'' nach ähnlichen zwei Methoden construirt werden, wie wir sie unter a) und b) in § 59 zur Reduction der Momente angewendet haben. In Fig. 18 Taf. V dachten wir uns aus R', das an Grösse, Richtung und Sinn mit dem zu suchenden R_0' übereinstimmt, und aus dem Pol C', welcher um die Momentenbasis von R' entfernt ist, ein Kräftepolygon gebildet. Das zugehörige Seilpolygon für R_0' muss so liegen, dass die dem R_0' vorhergehende und die ihm nachfolgende Seite auf R' ein Stück abschneiden, das gleich der Projection von $v''u_3''$ auf eine zur Projectionsaxe senkrechte Linie ist. Trägt man also dieses Stück von $3'$ aus in passendem Sinne auf R' als $3'a'$ auf, und zieht man durch seinen Endpunkt a' eine Parallele zum Strahl $C'0'$, so ist der Durchschnitt b' derselben mit dem gleichzeitig als Seilpolygonseite zu betrachtenden Strahl $C'3'$ der Knotenpunkt des Seilpolygons, durch welchen R_0' hindurchgehen muss. Der Sinn, in welchem $3'a'$ von $3'$ aus abzutragen ist, richtet sich nach dem Sinne, in welchem die Drehung von R_0 um $0'$ erfolgen muss, also nach dem Sinne der Projection von $v''u_3''$ auf eine zur Projectionsaxe senkrechte Linie; jene Projection ist in unserem Falle nach oben gekehrt, folglich muss R_0' die erste Tafel, von oben her gesehen, im positiven Sinne um $0'$ zu drehen suchen, und daher war $3'a'$ so abzutragen, wie es in der Figur geschehen ist. Wo in der durch b' zu R' gezogenen Parallelen R_0' angenommen wird, ist gleichgültig. Ganz in derselben Weise wie b' kann in der zweiten Tafel der Punkt b'', durch welchen R_0'' hindurchgehen muss, gefunden werden; und damit ist die Centralaxe R_0 construirt.

In Fig. 20 Taf. VI hat man aus R' als Hypotenuse und aus der Projection von $v''u_3''$ auf eine zur Projectionsaxe Senkrechte als Kathete, welche am Endpunkte $3'$ von R' anliegt, ein rechtwinkliges Dreieck construirt. Die andere Kathete $0'a'$, verlängert bis zum Durchschnitt mit der Peripherie des Kreises, der um $0'$ mit einem Radius gleich der Momentenbasis gezogen ist, ergibt den Punkt b', durch den R_0' hindurchgehen muss. Letztere Kraft liegt folglich irgendwo in der Parallelen zu R', welche durch b' gezogen wird. Und in der That sieht man leicht, dass jede in dieser Parallelen gelegene Kraft, die mit R' in Grösse und Sinn übereinstimmt, nach der in Fig. 20 befolgten Reductionsmethode ein dem $3'a'$ gleiches reducirtes Drehungsmoment um $0'$ geben muss. Der Sinn, nach welchem hin $0'a'$ zu verlängern ist, um den Punkt b' zu finden, richtet sich in ganz ähnlicher Weise wie vorhin nach dem Sinne, in welchem R_0' um $0'$ drehen muss, folglich nach dem Sinne der Projection von $v''u_3''$ auf eine zur Projectionsaxe Senkrechte. In ganz derselben Weise wie b' in

der ersten Tafel wird der Punkt b″ in der zweiten Tafel gefunden, durch den die zweite Projection R_0'' von R_0 hindurchgehen muss. Die Grösse, Richtung und der Sinn derselben stimmen mit R″ überein.

Kehren wir nun zu der am Schlusse des vorigen Paragraphen angestellten Betrachtung zurück. Die Projectionen Q', Q_1' (Fig. 45) zweier sich kreuzenden Kräfte Q, S, welche ein gegebenes Kräftesystem ersetzen können, auf die orthographische Ebene bilden ein Gegenpaar, dessen Momentenaxe die Projection der Momentenaxe U des Gegenpaars Q, Q_1 auf die Resultante R, oder auf die Centralaxe ist. Diese Projection ist die Minimal-Momentenaxe U_0, also constant. Daraus folgt:

1. Die Projectionen aller der Paare sich kreuzende Kräfte, durch welche ein gegebenes Kräftesystem im Raum ersetzt werden kann, auf die orthographische Ebene sind Gegenpaare, deren Momentenaxen einen constanten Werth haben; sie sind gleich der Minimal-Momentenaxe.

Somit hat das Drehungsmoment $Q_1' \times e$ (Fig. 45) des Gegenpaars Q', Q_1' in der orthographischen Ebene, und, da für ein gegebenes Kräftesystem auch die Resultante R völlig bestimmt ist, auch das Product $R \times Q_1' \times e = R \times U_0$ einen constanten Werth. Dieses Product hat aber eine einfache geometrische Bedeutung: $R \times Q_1'$ ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ORS, also auch der des Dreiecks OSQ″, wenn OQ″ gleich und parallel mit Q gemacht wurde; e aber, die senkrechte Entfernung der beiden Projectionen Q' und Q_1', ist zugleich die senkrechte Entfernung der zwei Parallelebenen durch Q und S, welche parallel zur Resultante R oder zur Centralaxe sind. Nach einem bekannten geometrischen Satz ist aber der Inhalt eines Tetraëders gleich dem Product aus dem Flächeninhalt eines, durch zwei seiner Gegenseiten bestimmten Dreiecks, das man erhält, wenn man diese Seiten von einem und demselben Punkt aus aufträgt, in den dritten Theil der Entfernung der beiden Parallelebenen, welche durch diese Gegenseiten gelegt werden. Demnach ist unser obiges Product $R \times U_0 = R \times Q_1' \times e$ der sechsfache Inhalt des Tetraëders, das durch das Paar sich kreuzende Kräfte Q und S als Gegenseiten bestimmt ist. Hieraus folgt also der merkwürdige Satz:

2. Wie auch ein System von Kräften im Raum durch ein Paar sich kreuzende Kräfte ersetzt werden mag, stets hat das Tetraëder, welches diese zwei Kräfte als Gegenseiten hat, den gleichen Inhalt. Dieser Inhalt ist sechsmal so klein als das Product aus der Resultante R und der Minimal-Momentenaxe U_0 des gegebenen Kräftesystems im Raum.

§ 62. Nullebene und Nullpunkt. — Ist R_0 (Fig. 46) die Centralresultante und U_0 die zugehörige Minimal-Momentenaxe eines Systems beliebiger Kräfte im Raume, beide vom Punkte M_0 der Centralaxe aus aufgetragen, so ist es leicht, die durch irgend einen anderen Punkt M gehende Resultante R und die Momentenaxe U des zugehörigen Gegenpaars zu construiren. Die Resultante R stimmt an Grösse, Richtung und Sinn mit R_0' überein, sie ist die parallel verschobene Kraft R_0. Das durch diese Verschiebung entstehende Gegenpaar hat eine Momentenaxe V, die, auf der Ebene $R_0 R$ der Verschiebung senkrecht stehend, gleich ist dem reducirten Drehungsmoment von R_0 um einen Punkt von R, oder gleich dem reducirten Drehungsmoment $R_0 \times e$, wenn e die senkrechte Entfernung der Kraft R von R_0 ist. Denken wir uns diese Momentenaxe in M_0 errichtet und mit U_0, auf welcher sie senkrecht steht, vereinigt, so erhält man die Resultantenaxe U, die dann auch parallel mit sich selbst nach M verlegt werden kann und einem Gegenpaar angehört, das in der durch M senkrecht auf U gelegten Ebene μ enthalten ist. Die Resultante R und dieses Gegenpaar mit der Axe U haben dann dieselbe Wirkung wie das gegebene Kräftesystem.

Fig. 46.

Nun ist für jede Drehungsaxe, die in der Ebene μ liegt, das Drehungsmoment des Gegenpaars Null, und für jede dieser Drehungsaxen wieder, welche durch den Punkt M geht, ist auch das Drehungsmoment der Resultante R Null; folglich ist für alle Drehungsaxen, welche, in der Ebene μ liegend, durch den Punkt M dieser Ebene gehen, das Gesammtdrehungsmoment des gegebenen Kräftesystems Null. Man nennt desshalb, nach Möbius [1]), M den Nullpunkt der Ebene μ und diese die Nullebene des Punktes M.

Wir haben gesehen, wie zu einem gegebenen Punkt M eine ganz bestimmte Nullebene gefunden wird. Es kann umgekehrt nun gezeigt werden, wie zu jeder Ebene μ ein ganz bestimmter Nullpunkt M gehört, der in ihr liegt. Denn legen wir durch M_0 (Fig. 46) eine Parallelebene zu μ und errichten eine Senkrechte darauf im Punkte M_0 nach der Seite hin, wo sie mit U_0 einen Winkel im ersten Quadranten bildet, so kann aus U_0, aus dieser Senkrechten und aus einer, in der Ebene beider zu U_0 senkrecht gerichteten Geraden ein hierdurch völlig bestimmtes Rechteck gebildet werden, dessen eine Seite U_0 ist, dessen Diagonale U in jener Senkrechten auf der Parallelebene zu μ und dessen andere Seite V in der senkrecht zu U_0 errichteten Geraden liegt. Verschiebt man dann in einer, durch R_0 gehenden und auf V senkrecht stehenden Ebene die Kraft R_0 parallel mit sich selbst um so viel und nach solcher Seite hin, wie es ihrer Vereinigung mit dem Gegenpaar, dessen Axe $-V$ ist, entspricht, um eine Entfernung e also, welche der Bedingung $R_0 \times e = V$ genügt, so ist der Durchschnittspunkt der so erhaltenen Parallellinie zu R_0 mit der Ebene μ der gesuchte Nullpunkt dieser Ebene. — Hieraus folgt also für irgend ein System von Kräften im Raume [2]):

1. Zu jedem Punkte gehört eine ihn enthaltende Nullebene und zu jeder Ebene ein in ihr liegender Nullpunkt.
2. Ist von einer Ebene und einem in ihr liegenden Punkt erstere die Nullebene des letzteren, so ist auch letzterer der Nullpunkt der ersteren, und umgekehrt.

Ausserdem gehen aus obigen Constructionen unmittelbar noch folgende Sätze hervor:

3. Für alle in der Centralaxe M_0R_0 liegenden Punkte M_0 sind die Nullebenen die auf der Centralaxe senkrecht stehenden Ebenen und umgekehrt:

3ª Für die Schaar paralleler, zur Centralaxe senkrechten Ebenen liegen die Nullpunkte in einer geraden Linie, in der Centralaxe.

4. Für alle Punkte M einer zur Centralaxe parallelen Geraden R sind die Nullebenen parallel zu einander und

4ª Für irgend eine Schaar paralleler Ebenen liegen die Nullpunkte in einer und derselben, zur Centralaxe parallelen Geraden.

5. Für alle Punkte M, welche auf dem Mantel eines Kreiscylinders liegen, dessen Axe die Centralaxe ist, liegen die auf ihren Nullebenen errichteten Senkrechten, wenn sie von einem beliebigen Punkt der Centralaxe aus gezogen werden, auf dem Mantel eines Kreiskegels, dessen Axe die Centralaxe ist. Der Winkel, den die Axe desselben mit seinen Erzeugenden bildet, ist der eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten die Minimal-Momentenaxe U_0 und die Axe V das auf dieselbe Basis reducirten Drehungsmoments der Centralresultante um irgend einen der Punkte M des Kreiscylindermantels ist, und zwar liegt jener Winkel der erstgenannten Kathete an.

Je weiter sich der Punkt M von der Centralaxe entfernt, desto grösser wird der Winkel, den die auf seiner Nullebene errichtete Senkrechte mit der Centralaxe bildet, desto kleiner also der Winkel der Nullebene selbst mit der Centralaxe, und für einen Punkt in unendlicher Entfernung wird die Nullebene parallel zur Centralaxe. — Umgekehrt, je kleiner der Winkel einer Ebene mit

1) Lehrbuch der Statik von Aug. Ferd. Möbius. Leipzig 1837. I. Bd. § 84.

2) Vgl. hier und für die folgenden Sätze dieses Paragraphen Möbius a. a. O. §§ 84 bis 88.

der Centralaxe wird, desto grösser wird derjenige, den ihre Senkrechte mit derselben Richtung einschliesst, desto grösser wird also die oben mit V bezeichnete Momentenaxe, und desto weiter muss R von der Centralaxe wegrücken. Für eine zur Centralaxe parallele Ebene rückt sie in unendliche Entfernung und schneidet diese Ebene in einem unendlich fernen Punkt. Daraus folgt:

6. Die Nullebenen von Punkten, die in unendlicher Entfernung von der Centralaxe liegen, sind parallel zur Centralaxe.

6ª Die Nullpunkte von Ebenen, die parallel zur Centralaxe sind, liegen in unendlicher Entfernung.

Liegt ein Punkt M, dessen Nullebene μ ist, zugleich in einer anderen Ebene, μ', so ist, wie für alle durch ihn gezogenen Drehungsaxen, die in der Ebene μ liegen, so auch für die Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene μ' das Gesammtdrehungsmoment des Kräftesystems Null. Deshalb muss jene Schnittlinie durch den Nullpunkt M' der Ebene μ' gehen. Daraus folgt also:

7. Liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht die Nullebene des Punktes durch den Nullpunkt der Ebene; oder was dasselbe ist:

7ª Geht eine Ebene durch einen Punkt, so liegt der Nullpunkt der Ebene in der Nullebene des Punktes.

8. Die Nullebenen mehrerer in einer Ebene liegenden Punkte gehen alle durch den Nullpunkt dieser Ebene.

8ª Die Nullpunkte mehrerer sich in einem Punkte schneidenden Ebenen liegen alle in einer und derselben Ebene, welche durch jenen Punkt geht und seine Nullebene ist.

Betrachtet man eine Gerade g als den Schnitt zweier Ebenen μ und μ', so muss die Nullebene jedes Punktes dieser Geraden sowohl durch den Nullpunkt M der Ebene μ, als auch durch den Nullpunkt M' der Ebene μ', also durch die Verbindungslinie MM' oder g' gehen. Daraus folgt:

9. Die Nullebenen mehrerer, in einer Geraden liegenden Punkte schneiden sich wieder in einer Geraden.

Aehnlich folgt aus 8a):

9ª Die Nullpunkte mehrerer, sich in einer Geraden schneidenden Ebenen liegen wiederum in einer Geraden.

Es entspricht also im Allgemeinen jeder Geraden g eine andere g', die Schnittlinie der Nullebenen irgend zweier Punkte in jener. Jeder Punkt in der einen Geraden hat die durch ihn und die andere Gerade gelegte Ebene als Nullebene und jede durch die eine Gerade gelegte Ebene hat zum Nullpunkt ihren Schnittpunkt mit der anderen Geraden. Die Beziehungen zwischen beiden Geraden sind also vollkommen gegenseitig, und deshalb hat man sie auch reciproke Gerade genannt; ausserdem heissen sie auch einander zugeordnete oder conjugirte Gerade.

Ist eine Gerade g parallel zur Centralaxe, so sind nach Satz 4 die Nullebenen aller ihrer Punkte parallel zu einander:

10. Die conjugirte oder reciproke einer zur Centralaxe parallelen Geraden liegt in unendlicher Entfernung.

Liegt eine Gerade g in der Nullebene μ eines ihrer Punkte M, so geht die Nullebene jedes anderen Punktes der Geraden, da diese alle in der Ebene μ liegen, durch den Nullpunkt M dieser Ebene, also ebenfalls durch die Gerade g. Man erhält folglich für eine solche Gerade keine conjugirte, oder vielmehr sie selber ist ihre conjugirte.

11. Jede Gerade, welche in der Nullebene eines ihrer Punkte liegt, oder jede Gerade einer Ebene, welche durch den Nullpunkt dieser Ebene geht, jede Gerade also, für welche das Gesammtdrehungsmoment des gegebenen Kräftesystems Null ist, hat sich selbst zur conjugirten.

Legt man durch die eine von zwei reciproken Geraden eine zur Centralaxe parallele Ebene, so liegt deren Nullpunkt in unendlicher Entfernung (Satz 6ª); da dies zugleich der Schnittpunkt

jener Ebene mit der anderen der beiden reciproken Geraden ist, so muss letztere Gerade parallel zu jener Ebene sein und es kann folglich eine, zu jener parallele Ebene durch sie gelegt werden.

12. Die Parellelebenen, welche durch zwei reciproke Gerade gelegt werden, sind zugleich parallel zur Centralaxe, schneiden also die orthographische Ebene in parallelen Geraden.

In dieser Eigenschaft stimmen also zwei reciproke Gerade mit den zwei sich kreuzenden Geraden überein, in denen die beiden Kräfte liegen, auf welche ein System beliebiger Kräfte im Raum zurückgeführt werden kann. Aber die Uebereinstimmung geht noch weiter: Es lässt sich, wie sogleich gezeigt werden soll, beweisen, dass je zwei reciproke Gerade zwei Kräfte enthalten, durch welche das gegebene System von Kräften im Raume ersetzt werden kann.

§ **63. Polarebene und Pol.** — Nach der Definition des vorigen Paragraphen ist die Nullebene μ eines Punktes M nichts anderes als die Ebene, in welcher das Gegenpaar mit der Momentenaxe U liegt, das zusammen mit der in M angreifenden, zur Centralaxe parallelen Resultante R des gegebenen Kräftesystems dieses ersetzen kann. Indem man jenes Gegenpaar durch irgend zwei parallele Kräfte von gleicher Grösse und entgegengesetztem Sinn darstellt, deren reducirtes Drehungsmoment U ist, und von denen die eine ebenfalls in M angreift, kann man letztere mit R zu einer Resultante vereinigen, die mit der anderen Kraft des Gegenpaars ein Paar sich kreuzende Kräfte bildet, dessen Wirkung mit der des gegebenen Kräftesystems übereinstimmt. Da nun den Kräften des Gegenpaars in der Nullebene jede beliebige Richtung und Grösse gegeben werden kann, wenn nur ihr Drehungsmoment immer gleich U ist, so folgt daraus noch folgende Bedeutung der Nullebene und des Nullpunktes:

1. Für jede durch einen Punkt M gelegte Kraft liegt die zugehörige, die mit ihr ein gegebenes Kräftesystem ersetzen kann, in einer durch diesen Punkt gehenden Ebene μ und

1ª Für jede in einer Ebene μ liegende Kraft geht die zugehörige, die mit ihr dieselbe Wirkung hat wie ein gegebenes Kräftesystem, durch einen bestimmten Punkt M der Ebene.

Aus diesem Gesichtspunkte hat man den Punkt M auch den Pol der Ebene μ und die Ebene μ die Polarebene des Punktes M genannt. Die Bedeutung von Pol und Polarebene ist aber genau dieselbe wie die von Nullpunkt und Nullebene, und deshalb gelten die im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze alle noch, wenn man die Worte Nullpunkt und Nullebene mit Pol bezw. Polarebene vertauscht.

Ist folglich g eine von zwei reciproken Geraden, wie sie im vorigen Paragraphen definirt worden sind, M ein Punkt in ihr mit der Null- oder Polarebene μ, die durch die zweite Gerade g′ geht; ist ferner M_1 ein zweiter Punkt der Geraden g, dessen Polarebene μ_1 also gleichfalls durch g′ geht: so muss für jede Kraft, welche durch M geht, die zugehörige in der Ebene μ und für jede durch M_1 gehende die zugehörige in μ_1 liegen. Für eine durch M und M_1 zugleich hindurchgehende, also in g liegende Kraft muss also die zugehörige in den Ebenen μ und μ' zugleich, d. h. in der Geraden g′ liegen.

2. Je zwei sich kreuzende Kräfte, welche ein gegebenes Kräftesystem im Raum in seiner Wirkung ersetzen können, liegen in zwei conjugirten oder reciproken Geraden dieses Systems.

2ª Je zwei reciproke Gerade eines Systems von Kräften im Raum enthalten ein Paar zusammengehörige Kräfte, welche jenes System ersetzen können.

Da nun die eine von zwei reciproken Geraden im Allgemeinen willkürlich angenommen werden kann, die andere aber alsdann völlig bestimmt ist, so folgt noch:

3. Ein gegebenes Kräftesystem im Raum kann im Allgemeinen durch zwei sich kreuzende Kräfte ersetzt werden, von denen die eine in einer willkürlich angenommenen Geraden liegen kann.

Durch Annahme jener Geraden ist aber dann das Paar sich kreuzender Kräfte völlig bestimmt. Denn zu der angenommenen Geraden gibt es nur eine reciproke, die man findet, indem man durch zwei Punkte jener die Null- oder Polarebenen legt und deren Schnittlinie bestimmt. Legt man alsdann durch beide reciproke Gerade Parallelebenen, die von selbst parallel zur Centralaxe werden,

und sucht man deren Schnittlinien mit der orthographischen Ebene, so darf man in dieselben nur zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte eines Gegengaares legen, dessen reducirtes Drehungsmoment gleich der Minimal-Momentenaxe U_0 ist. Jene Kräfte sind hierdurch vollständig bestimmt, die orthogonalen Projectionen derselben auf die bereits gefundenen reciproken Geraden sind die gesuchten zusammengehörigen Kräfte.

Aus den beiden Ausnahmsfällen in den Sätzen 10 und 11 des vorigen Paragraphen folgt:

4. Ein System gegebener Kräfte im Raume kann nicht durch zwei solche sich kreuzende Kräfte ersetzt werden, von denen die eine parallel zur Centralaxe ist; die andere müsste in unendlicher Entfernung liegen.
5. Ein System gegebener Kräfte im Raume kann nicht durch zwei solche sich kreuzende Kräfte ersetzt werden, von denen die eine in einer Geraden liegt, um welche das Gesammtdrehungsmoment der gegebenen Kräfte gleich Null ist.

§ 64. **Zusammensetzung der Kräfte im Raume ohne Zuhülfenahme der Gegenpaare.** — Die beiden sich kreuzenden Kräfte, durch welche ein System beliebiger Kräfte im Raume ersetzt werden kann, können aus diesen auch direct, ohne Zuhülfenahme von Gegenpaaren gefunden werden und zwar auf verschiedenen Wegen:

a) Man zerlege die erste der gegebenen Kräfte, P_1 (Fig. 19[b] Taf. V), in einem beliebigen ihrer Punkte I, den man als ihren Angriffspunkt betrachtet, auf die am Schlusse des § 14 angegebene Weise in drei Componenten, von denen die eine, S_1, an Grösse, Richtung und Sinn beliebig angenommen werden darf, während die zweite, T_1, durch einen willkürlich angenommenen Punkt O geht, und die dritte, S'_1, die gerade Linie, in welcher die zweite der gegebenen Kräfte, P_2, wirkt, schneidet. In diesem Schnittpunkte II, den man als Angriffspunkt von P_2 nehmen kann, zerlegt man alsdann diese Kraft auf die nämliche Weise in drei Componenten, von denen die erste, S_2, der Componente S'_1 aus der ersten Kraft gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt ist, während die zweite wieder durch den Punkt O geht und die dritte die Kraft P_3 schneidet. In dem Schnittpunkte III zerlegt man dann die Kraft P_3 in derselben Weise u. s. w. Die letzte Kraft, P_n, aber zerlegt man in dem Schnittpunkte der vorausgehenden Componente S'_{n-1} mit ihr wiederum in drei Componenten, von denen die eine, S_n, der Componente S'_{n-1} gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt ist, die andere T_n durch den Punkt O geht und die dritte, S'_n, die erste Componente der ersten Kraft, S_1, schneidet.

Alsdann können die erste und letzte Componente, S_1 und S'_n, in eine Resultante S vereinigt werden; die in den Verbindungslinien der Angriffspunkte I, II, III... wirkenden Componenten S'_1 und S_2, S'_2 und S_3 u. s. w. bis S'_{n-1} und S_n heben sich gegenseitig auf; und die durch den Punkt O gehenden Componenten T_1, T_2, T_3... können mit ihren Angriffspunkten in diesen Punkt verlegt und in eine Resultante T vereinigt werden. S und T sind folglich die beiden, im Allgemeinen sich kreuzenden Kräfte, welche das gegebene Kräftesystem ersetzen. Wenn beide in einer Ebene liegen, oder wenn eine von ihnen Null wird, d. h. wenn die beiden Kräfte S'_n und S_1 entweder, oder die Kräfte T_1, T_2, T_3... unter sich im Gleichgewicht sind, so lässt sich das gegebene Kräftesystem in eine einzige Resultante vereinigen. Sind S und T parallel zu einander, von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Sinn, so ist das Resultat der Vereinigung ein Gegenpaar. Das gegebene Kräftesystem ist endlich im Gleichgewicht, wenn S und T, jede einzeln, Null werden, oder wenn sie gleichgross und in derselben geraden Linie einander entgegengesetzt sind.

Die Zerlegung der Kräfte P_1, P_2, P_3... wird, wie im § 14, am besten mittelst einer Hülfsfigur (Fig. 19[a] Taf. V) vorgenommen. Man bekommt dann für jede dieser Kräfte ein unebenes Viereck als Kräftepolygon, dessen Schlusslinie die zerlegte Kraft ist. Das Viereck für P_1 ist mit 0 0′ 1′ 1 bezeichnet; seine Seiten sind an Grösse, Richtung und Sinn gleich den in sie eingeschriebenen Kräften. In dem für die Zerlegung der Kraft P_2 zu zeichnenden Viereck ist die erste Seite gleich und parallel

der letzten Seite des vorigen Vierecks, nur ihr Sinn ist entgegengesetzt. Folglich kann das zweite Viereck 1 1 2' 2 an das erste so gelegt werden, dass beide jene Seite gemeinschaftlich haben. Auf gleiche Weise kann dann das dritte Viereck an das zweite gelegt werden u. s. w. So erhält man eine polyedrische Oberfläche, deren sich an einander anschliessende Kanten 0 1, 1 2, 2 3... nichts anderes, als das Kräftepolygon aus den gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3... bilden, dessen Schlusslinie 0n oder R wieder die Resultante des gegebenen Kräftesystems der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach vorstellt. Ebenso schliessen sich die Kanten 0' 1', 1' 2', 2' 3'... an einander an; sie bilden das Kräftepolygon der Componenten T_1, T_2, T_3..., welche sämmtlich durch den Punkt O gehen; dessen Schlusslinie 0' n' ist folglich gleich der Resultante T der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach. Wenn diese Resultante 0' n' mit den Componenten S_1 und S'_n an einander gereiht wird, wie sich dies in Fig. 19ᵃ von selbst ergibt, so erhält man wieder ein Kräftepolygon, dessen Schlusslinie R ist, und es ist ja auch klar, dass die Componenten S'_n und S_1 mit T, wenn sie sämmtlich parallel mit sich selbst in einen Punkt verlegt und dort zusammengesetzt werden, dieselbe Resultante R geben müssen, wie die ursprünglich gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3..., wenn auf gleiche Weise mit ihnen verfahren wird.

Die Figur 19ᵇ, eine Pyramide mit der Spitze O und den Seitenflächen O I II, O II III etc., entspricht offenbar für obige Zusammensetzung von Kräften im Raume dem Seilpolygon von Kräften in der Ebene. Man nennt sie deshalb Seilpyramide[1]). Ebenso entspricht die polyedrische Oberfläche Fig. 19ᵃ dem Kräftepolygon in der Ebene; man nennt sie deshalb Kräftepolyeder[2]). Der Kräftezug 0' 1' 2'... vertritt in demselben die Stelle des Poles im ebenen Kräftepolygon und heisst desshalb passend Polfigur; die Verbindungslinien 0 0', 1 1', 2 2' etc. werden Seitenkanten genannt.

Die Figuren 19ᵃ und 19ᵇ Taf. V sind zunächst nur als Bilder der betreffenden Figuren im Raume zu betrachten. Sie sind, mit Weglassung aller Constructionslinien, die ersten Risse dieser Figuren. Die Construction selber muss natürlich mit den Hülfsmitteln der darstellenden Geometrie in den beiden Tafeln eines Projectionssystems durchgeführt werden. Man sieht dann leicht, dass sie keineswegs einfacher ist als die im § 59 gelehrten.

b) Wenn man, behufs Vereinigung der Kräfte P_1, P_2... (Fig. 47) im Raume, einen beliebigen Punkt O und eine beliebige Ebene μ annimmt, so sind dadurch die Ebenen, welche durch jenen Punkt O und die Kräfte P_1, P_2... gehen, sowie deren Schnittlinien mit der Ebene μ bestimmt. In diesen Schnittlinien liegen die Schnittpunkte A'_1, A'_2... der Kräfte mit der Ebene μ, welche Schnittpunkte auch als Angriffspunkte der Kräfte genommen werden können. Verbindet man sie mit dem Punkte O und zerlegt die Kräfte P_1, P_2... in je zwei Componenten, von denen die einen, V_1, V_2...,

Fig. 47.

1) Levy, Statique graphique. Paris 1874. § 168.
2) Steiner, die graphische Zusammensetzung der Kräfte. Wien 1876. § 9.

in den Schnittlinien $A'_1 N_1$, $A'_2 N_2 \ldots$, die anderen, T_1, $T_2 \ldots$, in den Verbindungslinien $A'_1 O$, $A'_2 O \ldots$ liegen, so erhält man statt des ursprünglichen Kräftesystems zwei, von denen das eine, V_1, $V_2 \ldots$, in der Ebene μ liegt, während sämmtliche Kräfte T_1, $T_2 \ldots$ des anderen durch einen und denselben Punkt O gehen. Im Allgemeinen ergeben jene Kräfte eine, mittelst Kräfte- und Seilpolygon in der Ebene μ zu construirende Resultante V und diese eine Resultante T, die durch den Punkt O geht. V und T sind wieder die beiden, im Allgemeinen sich kreuzenden Kräfte, welche das gegebene Kräftesystem im Raume ersetzen können.

Rückt der Punkt O immer weiter von der Ebene μ weg, bis er zuletzt in unendliche Entfernung zu liegen kommt, so werden die Componenten T_1, $T_2 \ldots$ parallel zu einander und können im Allgemeinen in eine, zu ihnen parallele Resultante vereinigt werden, wie es speciell noch im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird. Diese bildet dann mit der Resultante V in der Ebene μ das Paar sich kreuzende Kräfte, welches dieselbe Wirkung hat wie die gegebenen. — Rückt im Gegentheil die Ebene μ immer weiter von dem Punkte O weg und zuletzt in unendliche Entfernung, so werden die Componenten T_1, $T_2 \ldots$ parallel zu den Kräften P_1, $P_2 \ldots$ und ihnen gleich, während die Componenten V_1, $V_2 \ldots$ unendlich kleine Kräfte in der unendlich fernen Ebene und auf bekannte Weise durch Gegenpaare und deren Momentenaxen bestimmt werden. Das im § 59 benützte Verfahren zur Vereinigung von Kräften im Raum ist also eigentlich nur ein specieller Fall des obigen. Wenn die Constructionen bei diesem letzteren wieder, wie es ja sein muss, in den beiden Tafeln eines Projectionssystems ausgeführt werden, so sieht man, dass es ebenfalls nicht einfacher als die im § 59 gelehrten Methoden ist.

§ **65.** Bei beiden eben behandelten Methoden der Vereinigung von Kräften im Raume zu einem Paar sich kreuzende Kräfte kann von der einen dieser letzteren ein Punkt, ihr Angriffspunkt, gegeben werden. Ist T (Fig. 48) diese Kraft mit dem gegebenen Angriffspunkt O und S die zugehörige zweite, so ist eine Ebene ω bestimmt, welche durch letztere und durch den Punkt O hindurchgeht. Zieht man durch O eine zweite, von O T verschiedene, sonst beliebige Gerade O O′, so schneidet die Ebene, welche durch sie und durch O T gelegt wird, die Ebene ω in einer bestimmten Geraden und die Kraft S in einem gewissen Punkt A, in welchen der Angriffspunkt dieser Kraft verlegt werden kann. Alsdann kann die Kraft T in zwei Componenten zerlegt werden, von denen eine, Q, in jener Schnittgeraden, die andere, T′, in der Geraden O O′ liegt. Erstere kann mit ihrem Angriffspunkt nach A verlegt und dort mit S in eine Resultante S′ vereinigt werden, so dass also die beiden sich kreuzenden Kräfte S und T durch die sich kreuzenden Kräfte S′ und T′ ersetzt sind, von denen die eine, T′, durch zwei willkürlich angenommene Punkte O und O′ geht.

Fig. 48.

Es kann somit ein gegebenes Kräftesystem im Raume durch zwei sich kreuzende Kräfte ersetzt werden, von denen die eine in einer gegebenen geraden Linie O O′ liegt. Dass aber durch diese Bedingung beide Kräfte, die in O O′ liegende sowohl als die andere, völlig und unzweideutig bestimmt sind, ist leicht zu beweisen. Denn würde mit der in O O′ liegenden Kraft T′ eine andere als S′, etwa S″, das gegebene Kräftesystem ebenfalls ersetzen können, so müsste das letztere Paar von Kräften, T′ und S″, wenn jede in ihrer Wirkungslinie entgegengesetzt von gleicher Grösse genommen wird, das erstere Kräftepaar T′ und S′ im Gleichgewicht halten. Die in O O′ liegenden beiden Kräfte sind aber für sich im Gleichgewicht, folglich müssen es auch S′ und —S″ sein, was nur der Fall ist, wenn sie einander gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt sind; S″ muss also identisch mit S′ sein. — Gäbe es aber in der geraden Linie O O′ noch eine zweite, von T′ verschiedene

Kraft, T'', welche mit einer anderen als S', mit S'', das gegebene Kräftesystem ersetzen könnte, dann müssten wieder die, in ihren Wirkungslinien entgegengesetzt und von gleicher Grösse genommenen Kräfte T'' und S'', nämlich —T'' und —S'', den Kräften T' und S' das Gleichgewicht halten. T' und —T'' geben aber eine Resultante in derselben Geraden OO', in der sie liegen, die also mit den Kräften S' und —S'' im Gleichgewicht sein müsste. Das kann aber im Allgemeinen nicht sein, weil hierzu die drei Kräfte in einer Ebene liegen und die Resultante aus zweien gleich und in derselben geraden Linie entgegengesetzt der dritten sein müsste, während der Voraussetzung nach die Geraden, in denen S' und T' liegen, zwei sich kreuzende Linien sind.

Für ein gegebenes Kräftesystem im Raume entspricht also irgend einer Geraden in bestimmter Weise eine zweite: wenn die eine eines Paars sich kreuzender Kräfte, durch welche jenes Kräftesystem ersetzt werden kann, in der einen dieser Geraden liegt, so liegt die andere in der zweiten Geraden. Jenes Paar gerade Linien sind folglich die reciproken oder conjugirten Geraden, die wir schon in den §§ 62 und 63 kennen gelernt haben: Wenn in Fig. 48 der Geraden OO' alle möglichen Richtungen ausserhalb der Ebene ω gegeben werden, so findet man immer eine Kraft T', die durch O geht, und eine zugehörige Kraft S', welche in der Ebene ω liegt. Der Punkt O ist der Pol der Ebene ω, und letztere die Polarebene des Punktes O etc. etc.

§ 66. **Reciproke Polyeder.** — Aus Fig. 48 folgt sofort noch, dass den beiden sich schneidenden Geraden T und T' als conjugirte zwei andere sich schneidende Gerade S und bezw. S' entsprechen, und zwar so, dass die Ebene der beiden ersten durch den Schnittpunkt der letzteren geht und umgekehrt die Ebene durch letztere beide Gerade den Schnittpunkt der beiden ersten enthält. Man kann dies auch aus den Sätzen über Pole und Polarebenen nachweisen, denn offenbar ist nicht bloss O der Pol der Ebene ω, sondern auch A der Pol der Ebene α, die durch T und T' geht. Daraus folgt nun weiter:

1. Einem unebenen geschlossenen Polygon entspricht ein anderes, ebenfalls geschlossenes so, dass zweien auf einander folgenden Seiten des ersteren zwei auf einander folgende Seiten des zweiten conjugirt sind und umgekehrt, und dass die Ebenen durch je zwei auf einander folgende Seiten des ersteren Polygons durch den Schnittpunkt der ihnen conjugirten Seiten des zweiten Polygons gehen und umgekehrt, dass die Ebenen durch zwei auf einander folgende Seiten des zweiten Polygons die Schnittpunkte der diesen Seiten conjugirten im ersten Polygon enthalten.

Aus den Sätzen des § 63 folgt ferner sehr einfach:

2. Liegt ein geschlossenes Polygon in einer Ebene, so entspricht jeder Seite desselben als conjugirte eine Gerade, welche durch den Pol jener Ebene geht, also dem ganzen Polygon von n Seiten ein n-Kant, dessen Spitze der Pol der Polygonebene ist; die Ebene durch je zwei auf einander folgende Kanten des n-Kantes geht durch denjenigen Eckpunkt des Polygons, welchen die diesen Kanten conjugirten Seiten desselben gemeinschaftlich haben.

2ª Umgekehrt entsprechen den n, von einem Punkt ausgehenden Kanten eines n-Kantes als conjugirte n Gerade in einer und derselben durch die Spitze des n-Kantes gehenden Ebene so, dass die Ebene durch je zwei auf einander folgende Kanten des n-Kantes durch die Schnittpunkte der ihnen conjugirten Linien gehen, und somit schliesst sich das Polygon aus den Linien der Ebene, wenn das n-Kant als geschlossenes genommen wird.

Sind ABCD... und A'BCD'... (Fig. 49) zwei an einander grenzende Seitenflächen eines ebenflächigen Polyeders, geschlossene Polygone mit der gemeinschaftlichen Kante BC, so entspricht dem Polygon ABCD... ein Vielkant von eben so vielen Kanten, als jenes Polygon Seiten hat, dessen Spitze der Nullpunkt M der Ebene μ jenes Polygons ist. Ebenso entspricht dem Polygon A'BCD'... ein Vielkant, dessen Spitze der Nullpunkt M' der Ebene μ' dieses Polygons ist. Beide Vielkante haben diejenige Kante, welche der gemeinschaftlichen Seite BC der Polygone conjugirt

ist, gemeinschaftlich; es ist dies also die Verbindungslinie der Nullpunkte M, M' der beiden Ebenen μ, μ', was auch direct aus den Sätzen des § 62 hervorgeht. Die Seitenfläche des Vielkantes mit der Spitze M, welche durch MM' und durch die dieser Kante vorausgehende, der Seite AB conjugirte Kante geht, muss den Schnittpunkt B der Seiten BC und AB enthalten; ebenso die Seitenfläche des Vielkantes M', welche durch M'M und durch die ihr vorausgehende, der Seite A'B conjugirte Kante derselben gelegt wird. Beide Seitenflächen fallen also in der Ebene MM'B zusammen. Ebenso fallen die beiden Seitenflächen der Vielkante M, M', welche durch die Kante MM' und die darauf folgenden, den Seiten CD und CD' conjugirten gehen, in eine Ebene, in die Ebene MM'C. Dabei ist B der Nullpunkt der Ebene MM'B, und in letztere fallen folglich die Conjugirten der von B ausgehenden Kanten des Polyeders, und bilden dieselben in ihr ein geschlossenes Polygon mit MM' als Seite und im Ganzen eben so vielen Seiten, als von der Ecke B Kanten ausgehen. Das Gleiche gilt für die Ecke C und ihre Nullebene MM'C. Die in beiden Ebenen MM'B und MM'C gelegenen geschlossenen Polygone haben die Kante MM' gemeinschaftlich.

Fig. 49.

Zu demselben Resultat wären wir gelangt, wenn wir von zwei benachbarten Ecken eines Polyeders mit gemeinschaftlicher, sie verbindender Kante ausgegangen wären.

Verfährt man so mit jedem Paar an einander grenzenden Seitenflächen und mit jedem Paar unmittelbar benachbarte, d. h. durch eine Kante verbundenen Ecken eines einfach geschlossenen und zusammenhängenden (Euler'schen) ebenflächigen Polyeders, so sieht man:

3. Jedem solchen Polyeder entspricht ein anderes, eben solches Polyeder, dessen Ecken die Nullpunkte der Seitenflächen, dessen Seitenflächen die Nullebenen der Ecken und dessen Kanten die Conjugirten der Kanten des ersten Polyeders sind; und umgekehrt steht das erste Polyeder in derselben Beziehung zum zweiten. Deshalb heisst man solche zwei Polyeder reciproke Polyeder. Jeder Seitenfläche des einen, die ein geschlossenes Polygon von n Seiten ist, entspricht eine in ihr liegende Ecke des anderen Polyeders, von der n Kanten ausgehen, und durch jede Ecke des einen Polyeders, von der k Kanten ausgehen, geht eine Seitenfläche des anderen Polyeders, in der ein geschlossenes Polygon von k Seiten liegt; jeder Kante des einen endlich ist eine Kante des anderen conjugirt.

Hat folglich das eine Polyeder p Seitenflächen, p' Ecken und n Kanten und ist daher nach dem Euler'schen Satz

$$p + p' - n = 2$$

so hat das reciproke Polyeder p' Seitenflächen, p Ecken und ebenfalls n Kanten und ist desshalb auch für dieses

$$p' + p - n = 2.$$

Ausserdem folgt unmittelbar:

4. Jedes von zwei reciproken Polyedern ist dem anderen zugleich um- und einbeschrieben.

Da die entsprechenden Kanten zweier reciproken Polyeder conjugirte Gerade eines Kräftesystems im Raum sind, so sind ihre Projectionen auf die orthographische Ebene des Kräftesystems parallele Linien. Die Projectionen zweier reciproken Polyeder auf die orthographische Ebene des Kräftesystems sind also geradlinige Figuren, deren entsprechende Seiten parallel sind, und die man beide auch parallel aus einander schieben kann, ohne dass sie diese Eigenschaft verlieren. Noch mehr: jede dieser Figuren besteht aus Polygonen, Knotenpunkten und Seiten so, dass jede Seite zweien Polygonen zugleich und nur zweien angehört und selber die Verbindungslinie zweier Knotenpunkte und nur zweier Knotenpunkte ist, und dass jedem geschlossenen Polygon der einen Figur ein Knoten mit so viel von ihm ausgehenden geraden Linien in der andern Figur entspricht, als jenes

Polygon Seiten hat, und umgekehrt jedem Knoten mit k von ihm ausgehenden Seiten in der einen Figur ein geschlossenes Polygon von k Seiten in der anderen; kurz, beide Figuren sind reciprok in dem Sinne, wie wir ihn schon in den §§ 20 und 35 angewendet haben.

5. Die Projectionen zweier reciproken Polyeder auf die orthographische Ebene sind reciproke Figuren.

5ᵃ Zwei reciproke Figuren in einer Ebene können als orthogonale Projectionen zweier reciproken Polyeder betrachtet werden, die einem Kräftesystem im Raum angehören, und die gegebenen Falls durch paralleles Zusammenschieben nur noch in die richtige gegenseitige Lage gebracht werden müssen.

So können z. B. die Figuren 14ᵃ und 14ᵇ (S. 9) als Projectionen zweier Tetraëder angesehen werden. Der Spitze C des einen entspricht die Seitenfläche I α II des anderen, und der Seitenfläche 0 1 2 des ersten die Spitze a des zweiten u. s. w.

Ebenso kann Fig. 26ᵃ (S. 27) als Projection einer Pyramide mit der Spitze C und der ebenen Grundfläche 1 2 . . . 6 aufgefasst werden. Das zu ihr reciproke Polyeder (Fig. 26ᵇ) hat eine, der Spitze C entsprechende ebene Seitenfläche I II . . . VI, ein Polygon von eben so vielen Seiten, als das Vielkant C Kanten hat; der Grundfläche 1 2 . . . 6 aber entspricht die Ecke a, wieder mit eben so vielen Kanten, als jene Seiten hat. Der Pyramide in Fig. 26ᵃ entspricht also eine reciproke Pyramide (Fig. 26ᵇ), deren Spitze (in die gehörige Lage gebracht) der Pol der Grundfläche jener Pyramide, und deren Grundfläche die Polarebene der Spitze jener ist.

Betrachtet man in Fig. 27 (S. 27), in dem Kräfte- und Seilpolygon für Kräfte in einer Ebene, die sich nicht in einem und demselben Punkt schneiden, die Fig. 27ᵃ als Projection einer Pyramide mit der Spitze C und der unebenen Grundfläche 1 2 3 4 5, so entspricht der Spitze C ein ebenes Polygon I II III IV V Fig. 27ᵇ mit eben so viel Seiten, als von jener Spitze Kanten ausgehen. Dem unebenen Polygon 1 2 3 4 5 aber entspricht ein unebenes Polygon a b c d e, das geschlossen ist, wie jenes, und dessen Seiten durch die Ecken des ebenen Polygons I II III IV V gehen. Denn in der That müssen z. B. die reciproken der drei in einer Ebene liegenden Seiten C 2, 2 3 und 3 C, welche in Fig. 27ᵃ bezw. mit 8, 3, 9 bezeichnet sind, durch einen und denselben Punkt gehen, also die reciproke 3 (Fig. 27ᵇ) zur Seite 3 (Fig. 27ᵃ) durch den Schnittpunkt III der Seiten 8 und 9 des ebenen geschlossenen Polygons I II III IV V. — Aber das Polyeder in Fig. 27ᵃ ist kein ebenflächiges mehr und die Fig. 27ᵇ ist überhaupt nicht mehr die Projection eines Polyeders, da dieses Ecken a, b, c . . . mit nur zwei Kanten haben müsste.

Man beseitigt diese Mängel, wenn man, wie in Fig. 4 Taf. II geschehen, noch einen zweiten Pol C′ des Kräftepolygons hinzunimmt. Dann kann diese Figur als Projection einer Doppelpyramide mit den Spitzen C und C′ und durchweg ebenen dreieckigen Seitenflächen aufgefasst werden, welche ein reciprokes Polyeder hat. Den Spitzen C, C′ entsprechen ebene, geschlossene Polygone I II . . V und I′ II′ . . V′ im reciproken Polyeder (Fig. 4ᵇ). Die gleichnamigen Ecken derselben sind durch die Reciproken I I′, II II′ etc. der Randlinien 01, 12 etc. der Doppelpyramide verbunden. Da von jeder Ecke 1, 2 . . . dieser Randlinien vier Kanten ausgehen, so sind die denselben entsprechenden Vierecke I I′ II′ II, II II′ III′ III etc. ebene Vierecke. Die Seiten I II und I′ II′, dann II III und II′ III′ etc. derselben schneiden sich folglich in einer und derselben geraden Linie, in der Schnittlinie der ebenen Deckflächen I II . . V und I′ II′ . . V′, welche zur Verbindungslinie der Pole C, C′ reciprok ist. Deshalb müssen sich auch die Projectionen jener Kanten, d. h die gleichnamigen Seiten der beiden Seilpolygone I II . . . und I′ II′ . . . auf einer und derselben geraden Linie schneiden, die parallel zur Verbindungslinie der Pole C, C′ ist, ein Satz, den wir schon im § 29 auf anderem Wege bewiesen haben.

Aehnlich können die Figuren 5ᵃ und 5ᵇ sowie 6ᵃ und 6ᵇ auf Taf. II als Projectionen reciproker Polyeder betrachtet werden.

§ **67.** Von besonderer Wichtigkeit ist, der später davon zu machenden Anwendungen auf die Fachwerke halber, eine gewisse Art von reciproken Polyedern, die wir nun betrachten wollen. Denken wir uns von einem geschlossenen Euler'schen Polyeder nach einer aus auf einander folgenden Kanten gebildeten, unebenen geschlossenen Linie ein Stück, eine Art von polyedrischer Haube abgeschnitten. Jene Linie, durch welche es geschieht, wollen wir kurz den Bord dieser polyedrischen Haube nennen. Die Ecken dieses Bordes verbinden wir mit einem Punkt C (Fig. 21^a Taf. VI) im Raum, mit einer Spitze, und erhalten so wieder ein vollständiges geschlossenes Polyeder, dessen reciprokes leicht zu erhalten ist. Der Spitze C entspricht ein ebenes Polygon I II..V (Fig. 21^b), dem unebenen Bord 1 2..5 ein unebenes geschlossenes Polygon, dessen Seiten denen jenes Bordes conjugirt sind und durch die Ecken I, II..V jenes ebenen Polygons gehen. Von jeder dieser Ecken gehen also drei Linien aus, welche den drei Seiten der Dreiecke entsprechen, welche um C herumliegen. Je zwei auf einander folgende jener Linien, die von zwei auf einander folgenden Eckpunkten des ebenen Polygons I II..V ausgehen und zweien auf einander folgenden Seiten des *unebenen* Bordes 1 2..5 conjugirt sind, müssen sich schneiden; liegen also mit der zwischenliegenden Seite des ebenen Polygons I II..V in *einer* Ebene und bilden mit dieser Seite einen Theil des Umfanges jenes ebenen Polygons, das der betr. Bordecke in Fig. 21^a) entspricht. So liegen also um das ebene Polygon I II..V herum Polygone, denen sich wieder andere anschliessen können, und welche zusammen den der polyedrischen Haube entsprechenden Theil des reciproken Polyeders bilden.

Man sieht, die Figuren 21^a und 21^b Taf. VI sind wieder nichts anderes als Kräfte- und Seilpolygon für Kräfte in einer Ebene, die sich nicht in einem und demselben Punkt schneiden, wie die Figuren 27^a und 27^b (S. 27) auch. Aber in Fig. 21^a ist das Kräftepolygon durch ein Netz von Linien 11, 12....17 ausgefüllt, denen in Fig. 21^b ein Netz von Linien **11, 12...17** entspricht, die zwischen solchen Kräften P_1, P_2..P_5 gezogen worden sind, welche sich im Gleichgewicht befinden, oder von denen die eine die Resultante der übrigen ist. Die Bedeutung dieses letzteren Netzes als Fachwerk werden wir im letzten Abschnitt würdigen.

§ **68. Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte im Raume.** — Die Bedingungen, unter denen ein System von Kräften im Raume im Gleichgewicht ist, lassen sich am einfachsten aus den Resultaten der im § 59 gelehrten Zusammensetzungsmethode entwickeln. Wird die Resultante R der nach einem und demselben Punkte verlegten Kräfte Null, schliesst sich also das Kräftepolygon aus ihnen, so ist die Wirkung sämmtlicher Kräfte gleich der des Resultanten-Gegenpaares, das durch die Resultantenaxe U vollständig bestimmt ist. Wird R nicht Null, dagegen U, schliesst sich also das Axenpolygon, so lassen sich sämmtliche Kräfte in die eine, R, zusammenfassen, die zufällig durch den willkürlich gewählten Punkt O geht. Das letztere, nämlich dass sich alle Kräfte in eine einzige Resultante zusammenfassen lassen, ist, wie wir bereits am Anfang des § 60 gezeigt haben, auch dann der Fall, wenn R und U senkrecht auf einander stehen. Ist endlich sowohl die Resultante R, als auch die Resultantenaxe U gleich Null, *schliesst sich also das Kräfte- und das Axenpolygon, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.*

R und U sind aber Null, wenn ihre Projectionen auf drei Axen, die nicht alle in einer Ebene liegen, also die algebraischen Summen der Projectionen der Seiten der Polygone, deren Schlusslinien sie sind, auf solche drei Axen Null werden. Daraus folgt also:

1. Kräfte im Raume sind im Gleichgewicht, wenn sowohl die algebraischen Summen ihrer Projectionen auf drei Axen, die nicht alle in einer Ebene liegen, als auch die algebraischen Summen ihrer Drehungsmomente um solche drei Axen Null sind;

oder mehr im Sinne der graphischen Statik gesprochen:

2. Kräfte im Raume sind im Gleichgewicht, wenn sich sowohl die Kräfte- als auch die Seilpolygone aus ihren Projectionen auf jede von drei sich schneidenden Ebenen schliessen.

§ 69. Zerlegung der Kräfte im Raume; Kräftetetraëder. — Wie ein System von Kräften im Raume in ein Paar sich kreuzende Kräfte oder in eine Resultante und ein zugehöriges Gegenpaar vereinigt werden kann, so lassen sich umgekehrt diese wieder durch ein System von Kräften im Raume ersetzen. Diese letzteren können dann natürlich noch mannigfaltigen Bedingungen unterworfen werden; aus der grossen Anzahl von Fällen und Aufgaben, die sich hiernach ergeben, heben wir nur einen Fall heraus, den nämlich, wo ein Paar sich kreuzende Kräfte oder eine Kraft und ein zugehöriges Gegenpaar durch *sechs* Kräfte im Raume ersetzt werden sollen, welche in den Seiten eines beliebigen, gegebenen Tetraëders liegen. Dass diese Aufgabe möglich und bestimmt ist, und wie sie gelöst werden kann, wollen wir sogleich zeigen; wir bemerken nur noch, dass das Tetraëder mit den sechs in seinen Kanten liegenden Kräften *Kräftetetraëder* genannt wird.

a) Sind zwei sich kreuzende Kräfte gegeben, so lege man durch jede derselben und durch eine Spitze S des Tetraëders eine Ebene, welche beide sich in einer durch diese Spitze gehenden Geraden l schneiden. Die der Spitze S gegenüberliegende Seitenfläche des Tetraëders schneide jene Ebenen nach den Geraden g und g', die sich selber wieder in *einem* Punkte S_1 der Geraden l treffen. Man verlege dann in jenen beiden Ebenen die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte in ihre Schnittpunkte A und A' mit den Geraden g und g', zerlege sie hier in je zwei Componenten, von denen die eine in der Geraden g bezw. g', die andere in der Verbindungslinie SA bezw. SA' liegt. Die beiden letzteren Componenten können alsdann in eine Resultante mit dem Angriffspunkt S vereinigt werden, die wiederum in völlig bestimmter Weise nach den in S zusammenstossenden drei Seiten des Tetraëders in drei Componenten zerlegt werden kann. Die vorhin erhaltenen, in den Linien g und g', also in der, der Spitze S gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraëders befindlichen beiden Componenten, die sich im Punkte S_1 schneiden, können ebenfalls in eine Resultante vereinigt werden, die, in jener Seitenfläche liegend, wieder in bestimmter Weise in drei Componenten zerlegt werden kann, welche in den in dieser Seitenfläche enthaltenen drei anderen Kanten des Tetraëders gelegen sind.

b) Ist die Kraft R und das zugehörige Gegenpaar mit der Momentenaxe U gegeben, so verlegen wir jene Kraft parallel mit sich selbst in eine Spitze S des Tetraëders. Von derselben Spitze aus ziehen wir die Momentenaxe V des durch jene Verlegung entstandenen Gegenpaars, sowie die ursprünglich gegebene Momentenaxe U, welche beide eine Resultantenaxe W geben. In der durch die Spitze S gehenden, auf W senkrechten Ebene zeichnen wir dann ein Gegenpaar so, dass sein reducirtes Drehungsmoment W ist und die eine seiner Kräfte durch S geht, während die andere in der Geraden liegt, in welcher die Gegenpaarsebene diejenige Seitenfläche des Tetraëders schneidet, die der Spitze S gegenüber ist. Letztere Kraft lässt sich in völlig bestimmter Weise in drei Componenten zerlegen, die in den drei Kanten jener Seitenfläche des Tetraëders liegen. Die zweite Kraft des obigen Gegenpaars, welche durch die Spitze S geht, kann mit der nach dieser Spitze parallel mit sich selbst verlegten Kraft R vereinigt und die Resultante in drei Componenten zerlegt werden, welche in den drei von S ausgehenden Kanten des Tetraëders enthalten sind.

VII. Abschnitt.

Parallele Kräfte im Raum und in der Ebene; ihr Mittelpunkt; ihre statischen Momente.

§ 70. **Mittelpunkt paralleler Kräfte, Schwerpunkt.** — Nach dem im § 48 bewiesenen Satze sind die Drehungsmomente zweier Kräfte um einen Punkt ihrer Resultante, also die Producte aus den Kräften in ihre senkrechten Entfernungen von diesem Punkte gleichgross. Bei zwei parallelen Kräften P_1, P_2 (Fig. 50) fallen die Strecken $\alpha\beta_1$ und $\alpha\beta_2$, welche diese Entfernungen messen, in eine und dieselbe gerade Linie $\beta_1\beta_2$ zusammen, als deren Abschnitte, genommen zwischen der Resultante und der betr. Kraft, sie betrachtet werden können. Aus der Productengleichung $P_1 \times \overline{\alpha\beta_1} = P_2 \times \overline{\alpha\beta_2}$ folgt aber die Proportion

$$P_1 : P_2 = \overline{\alpha\beta_2} : \overline{\alpha\beta_1},$$

Fig. 50.

d. h. die Resultante zweier paralleler Kräfte theilt eine zwischen ihnen gezogene und auf ihnen senkrechte Linie, folglich überhaupt jede zwischen ihnen gezogene Linie im umgekehrten Verhältniss jener Kräfte. Dies gilt natürlich auch für die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte A_1, A_2, so dass sich also verhält:

$$\overline{A_1 A_{12}} : \overline{A_{12} A_2} = P_2 : P_1,$$

und dieser Satz ist ebensowohl für gleich- als auch für entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte richtig. In letzterem Fall hat man den Theilungspunkt A_{12} nur ausserhalb der Endpunkte der Verbindungslinie $A_1 A_2$, also stets auf Seite der grösseren Kraft zu nehmen. Die Resultante selbst ist parallel zu den gegebenen Kräften und gleich ihrer algebraischen Summe der Grösse und dem Vorzeichen nach. Letzteres bestimmt den Sinn der Resultante.

Dreht man nun die parallelen Kräfte unter Beibehaltung ihrer Grösse um ihre Angriffspunkte in solcher Weise, dass sie sich stets parallel bleiben, so geht für jede Stellung $A_1P'_1$, $A_2P'_2$ derselben die Resultante P'_{12} durch den nämlichen Theilungspunkt A_{12} der Verbindungslinie der Angriffspunkte der Componenten hindurch; sie dreht sich also, wie die Componenten um ihre Angriffspunkte, um diesen Theilungspunkt, der desshalb der Mittelpunkt der beiden parallelen Kräfte heisst.

Kommt zu den beiden Kräften P_1, P_2 noch eine dritte P_3 mit dem Angriffspunkt A_3 hinzu, so kann die Resultante der drei parallelen Kräfte dadurch gefunden werden, dass man die Mittelkraft P_{12} der beiden ersten Kräfte in ganz gleicher Weise mit der dritten Kraft vereinigt wie jene beiden ersten Kräfte unter sich, wobei deren Mittelpunkt A_{12} als Angriffspunkt der Mittelkraft P_{12} betrachtet werden kann. Geschieht das, so theilt die Gesammtresultante P_{1-3} die Verbindungslinie $A_{12}A_3$ im

umgekehrten Verhältniss der Kräfte P_{12} und P_3. Für diesen Theilungspunkt gilt bezüglich dieser letzteren Kräfte natürlich dasselbe wie für den Theilungspunkt A_{12} bezüglich der Kräfte P_1 und P_2. Wenn folglich die drei parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3 unter Beibehaltung ihrer Grösse und ihres Parallelismus um ihre Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 gedreht werden, so dreht sich ihre Resultante, ihnen stets parallel bleibend, um den Punkt A_{1-3}. Dieser heisst desshalb wieder der *Mittelpunkt der drei parallelen Kräfte*.

Obige Ausführungen gelten natürlich ebenso, ob die drei Kräfte in einer Ebene liegen oder nicht; sie lassen sich auch sehr leicht auf vier und mehr Kräfte ausdehnen, und auf diese Weise gelangt man zu dem Begriff des *Mittelpunktes beliebig vieler paralleler Kräfte*. Wenn solche Kräfte unter Beibehaltung ihrer Grösse und ihres Parallelismus um ihre Angriffspunkte gedreht werden, so dreht sich ihre Resultante, ihnen stets parallel bleibend, um einen Punkt, den Mittelpunkt der Kräfte. Die Lage desselben hängt offenbar nur von der gegenseitigen Lage der Angriffspunkte und von dem Grössen*verhältnisse* der gegebenen Kräfte ab, nicht aber von deren absoluter Grösse oder von ihrer Richtung. Wenn folglich von einem Mittelpunkt paralleler Kräfte die Rede ist, so hat man sich dieselben immer an bestimmten gegebenen Angriffspunkten wirkend zu denken.

In dem Falle, wo die Kräfte die Gewichte von Massenelementen sind, die starr mit einander verbunden und als Angriffspunkte der Kräfte gedacht werden, heisst der Mittelpunkt jener parallelen Schwerkräfte der *Schwerpunkt* des Körpers, der aus jenen Massenelementen besteht.

§ 71. Graphisches Verfahren zur Aufsuchung des Mittelpunktes paralleler Kräfte. — Die vorhin ausgesprochene Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler Kräfte gibt ein einfacheres Verfahren für seine Aufsuchung an die Hand, als dasjenige ist, welches wir im vorigen § vor Augen hatten, wo wir die gegebenen Parallelkräfte successive mit einander vereinigt haben, nämlich zuerst zwei, dann die Mittelkraft derselben mit einer dritten u. s. w. f. Zeichnet man nämlich die gegebenen parallelen Kräfte unter Beibehaltung ihrer Angriffspunkte, ihrer Grösse und ihres Parallelismus in zwei verschiedenen Richtungen und construirt in beiden Fällen ihre Resultanten, so ist der Durchschnittspunkt derselben der gesuchte Mittelpunkt.

Dieses Verfahren ist für den Fall, wo die Angriffspunkte der parallelen Kräfte sämmtlich in einer Ebene liegen, unmittelbar anwendbar. Man kann dann die Kräfte in zwei verschiedenen Richtungen in dieser Ebene zeichnen und jedesmal mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons ihre Resultante in sehr einfacher Weise finden. In dem Falle, wo die Angriffspunkte der parallelen Kräfte beliebig im Raume liegen, führt ein Satz, der sehr leicht bewiesen werden kann, in einfacher Weise zur Kenntniss ihres Mittelpunktes. Der Satz lautet: *Die Parallelprojection des Mittelpunktes paralleler Kräfte, nach irgend welcher Richtung auf eine beliebige Ebene genommen, ist der Mittelpunkt paralleler Kräfte von derselben Grösse oder auch nur von demselben Grössenverhältniss wie die gegebenen, welche an den Parallelprojectionen der Angriffspunkte der letzteren thätig gedacht werden.* Diese an den Projectionen der Angriffspunkte wirkenden Kräfte können in der Projectionsebene angenommen und als Projectionen der gegebenen Kräfte im Raum aufgefasst werden, welch' letzteren ja jede beliebige Richtung, auch die parallel zur Projectionsebene, gegeben werden kann.

Fig. 51.

Der Beweis des Satzes ist, wie aus den Ausführungen im § 70 unmittelbar hervorgeht, leicht auf beliebig viele Kräfte auszudehnen, wenn er nur für zwei geführt ist. Für diese aber leuchtet seine Richtigkeit fast von selbst ein. Denn sind A_1 und A_2 (Fig. 51) die Angriffspunkte zweier Parallelkräfte, A'_1 und A'_2 ihre in irgend einer Richtung genommenen Parallelprojectionen auf die beliebige Projectionsebene E E, endlich A_{12} der Mittelpunkt der gegebenen Kräfte, welcher die Verbindungslinie $A_1 A_2$ ihrer Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnisse der

Kraftintensitäten theilt, so liegt die Parallelprojection A'_{12} dieses Mittelpunktes in der Verbindungslinie der Parallelprojectionen A'_1 und A'_2 und theilt diese Verbindungslinie in dem nämlichen Verhältniss $\overline{A_1 A_{12}} : \overline{A_{12} A_2}$. Der Punkt A'_{12} ist folglich der Mittelpunkt zweier in den Parallelprojectionen der Angriffspunkte wirkenden Parallelkräfte von derselben Grösse oder demselben Grössenverhältniss wie die gegebenen Kräfte. Die Uebertragung des Satzes auf drei und mehrere parallele Kräfte ist, wie schon bemerkt, sehr leicht. Als unmittelbare Folge aus ihm ergibt sich der andere, dass die Parallelprojection der Resultante paralleler Kräfte auf irgend eine Ebene die Mittelkraft der Parallelprojectionen dieser Kräfte auf dieselbe Ebene ist.

Um mittelst des eben bewiesenen Satzes den Mittelpunkt gegebener paralleler Kräfte im Raume zu finden, projicire man deren Angriffspunkte nach irgend welcher Richtung auf eine beliebige Ebene, denke sich an den Projectionen in der Projectionsebene die gegebenen Kräfte einmal in einer, dann in irgend einer anderen Richtung wirken und bestimme beidemal mittelst Kräfte- und Seilpolygon ihre Resultante. Der Durchschnittspunkt beider Resultanten ist dann die Projection des gesuchten Mittelpunktes, der folglich in dem von derselben ausgehenden Projectionsstrahl liegt. Wo? in diesem erfährt man, wenn man die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte noch ein Mal in anderer Richtung auf dieselbe oder auf eine andere Projectionsebene projicirt, in den erhaltenen Projectionen die gegebenen Kräfte, in der Projectionsebene liegend, nach irgend einer Richtung hin wirken lässt und ihre Resultante mittelst des Kräfte- und Seilpolygons aufsucht. In der durch diese Resultante bestimmten projicirenden Ebene liegt die Resultante der gegebenen Kräfte im Raum, wenn diesen dieselbe Richtung wie den zuletzt vereinigten Parallelkräften gegeben wird. Der gesuchte Mittelpunkt ist folglieh der Durchschnittspunkt des oben erhaltenen Projectionsstrahls mit der eben bestimmten projicirenden Ebene; und dieser Durchschnittspunkt kann immer erhalten werden, wenn man nur dafür sorgt, dass der Projectionsstrahl und die projicirende Ebene nicht zusammenfallen, was immer leicht geschehen kann.

Für parallele Kräfte im Raum hat man somit drei Kräfte- mit ihren zugehörigen Seilpolygonen zu construiren. In der Regel werden die Angriffspunkte solcher Kräfte durch ihre Orthogonalrisse in zwei auf einander senkrecht stehenden Tafeln gegeben sein. Dann kann man zwei von den obigen drei Kräfte- und Seilpolygonen in der einen, etwa in der zweiten dieser Tafeln construiren, indem man an den Rissen der Angriffspunkte in derselben die gegebenen Kräfte einmal in einer, das anderemal in irgend einer anderen davon verschiedenen Richtung, die jedoch wie die vorige in die Projectionstafel fällt, wirken lässt. Der Durchschnittspunkt der beiden so erhaltenen Resultanten ist der zweite Riss des gesuchten Mittelpunktes. Der erste Riss desselben liegt in einer durch jenen gezogenen Senkrechten zur Projectionsaxe und in der Resultante, welche man in der ersten Tafel aus den gegebenen Kräften construirt, die man an den ersten Rissen der gegebenen Angriffspunkte in irgend welcher, nur nicht zur Projectionsaxe senkrechten Richtung wirken lässt.

Diese Construction wurde beispielsweise in Fig. 52 mit vier Parallelkräften durchgeführt, deren Angriffspunkte durch ihre orthogonalen Risse A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 und A''_1, A''_2, A''_3, A''_4 auf zwei auf einander senkrecht stehenden Tafeln gegeben sind. Die Risse der Parallelkräfte selbst sind nicht gezeichnet, da neben ihren Angriffspunkten nur ihre Grösse und ihr Sinn gegeben zu sein braucht, ihre Richtung aber für vorliegende Aufgabe gleichgültig ist. Jene, Grösse und Sinn der Parallelkräfte nämlich, sind aus dem Kräftepolygon $0''1''2''3''4''$ zu entnehmen, welches in der zweiten Tafel auf eine willkürliche Linie aufgetragen wurde. Legen wir durch die Punkte A''_1, A''_2... Linien parallel zur Kraftrichtung $0''4''$ im Kräftepolygon, nehmen wir in letzterem einen beliebigen Punkt C'' als Pol und construiren wir aus diesem das Seilpolygon $0''I''II''$.. V'', so geht die Resultante der in der angenommenen Richtung an den Punkten A''_1, A''_2... wirkenden Parallelkräfte durch den Durchschnittspunkt α'' der äussersten Seilpolygonseiten, liegt also in der zur Kraftrichtung parallelen Linie R''. Eine zweite solche Linie R''' erhält man, wenn man den in den Punkten A''_1, A''_2... an-

greifenden Kräften eine andere Richtung in der zweiten Tafel gibt, das Kräftepolygon $0''' 1''' \ldots 4'''$ aus ihnen zeichnet mit dem willkürlichen Punkt C''' als Pol, daraus das Seilpolygon $0''' I''' \ldots V'''$ construirt und durch den Durchschnittspunkt α''' der äussersten Seiten desselben R''' parallel zur

Fig. 52.

zweiten Kraftrichtung zieht. Der Durchschnittspunkt A_0'' der beiden Linien R'' und R''' ist der zweite Riss des gesuchten Mittelpunktes. Um den ersten Riss desselben zu erhalten, legten wir in der ersten Tafel durch die Projectionen A_1', $A_2' \ldots$ der Angriffspunkte Linien parallel zur Projectionsaxe, zeichneten für diese Richtung aus den gegebenen Kräften das Kräftepolygon $0' 1' 2' 3' 4'$ mit dem willkürlichen Punkt C' als Pol und endlich das zugehörige Seilpolygon $0' I' II' \ldots V'$. In der Linie R', welche durch den Durchschnittspunkt α' der äussersten Seiten des letzteren parallel zur Kraftrichtung gezogen ist, muss dann der erste Riss A_0' des gesuchten Mittelpunktes liegen, welcher somit jetzt vollständig bestimmt ist.

Es versteht sich wohl von selbst, dass man bei der in der Figur getroffenen Anordnung das Kräftepolygon $C''' 0''' 1''' 2''' 3''' 4'''$ auch mit dem $C' 0' 1' 2' 3' 4'$ hätte zusammenfallen lassen können; und dass das Kräftepolygon $C'' 0'' 1'' 2'' 3'' 4''$ so gezeichnet werden kann, dass es dem $C' 0' 1' 2' 3' 4'$ ganz gleich wird und nur um 90° verdreht erscheint. Dann werden die Seiten des Seilpolygons $0''' I''' \ldots V'''$ parallel und die des Seilpolygons $0'' I'' \ldots V''$ senkrecht zu denen des Seilpolygons $0' I' II' \ldots V'$, und alle drei können zugleich aus dem Kräftepolygon $C' 0' 1' 2' 3' 4'$ allein durch einmaliges Anlegen der Paralleldreiecke für jede Seite construirt werden.

§ 72. Weitere Eigenschaften des Mittelpunktes paralleler Kräfte. — Aus der im § 70 gegebenen Definition des Mittelpunktes paralleler Kräfte folgen unmittelbar noch folgende Eigenschaften desselben:

Wenn die Parallelkräfte in Gruppen getheilt werden können, so, dass die Mittelpunkte aller Gruppen

a) in einem Punkt zusammenfallen, so ist dies zugleich der Mittelpunkt aller gegebenen Kräfte;

b) in einer geraden Linie oder in einer Ebene liegen, so fällt auch der Mittelpunkt aller gegebenen Kräfte in diese gerade Linie bezw. Ebene.

Eine weitere Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler Kräfte soll in folgendem § abgeleitet werden.

§ 73. Momente paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene, oder statische Momente derselben. — Man nennt das Product aus einer Kraft in die senkrecht oder schief gemessene Entfernung ihres Angriffspunktes von einer gegebenen Ebene das Moment der Kraft in Bezug auf diese Ebene oder kurz das statische Moment der Kraft und die Ebene die Momentenebene. Doch wird diese Bezeichnung nur gebraucht, wenn die Kraft einem System von Parallelkräften angehört. Unter dem Gesammtmoment eines solchen Systems von Parallelkräften in Bezug auf eine gegebene Momentenebene versteht man dann die algebraische Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte, wobei selbstverständlich die Entfernungen der Angriffspunkte von der Ebene alle in der nämlichen senkrechten oder schiefen Richtung gemessen werden müssen. Bei der Bildung jener algebraischen Summe hat man den einzelnen Parallelkräften das positive oder negative Vorzeichen zu ertheilen, je nachdem sie in dem einen oder im entgegengesetzten Sinn wirken; und die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von der Momentenebene sind mit positivem oder negativem Zeichen zu versehen, je nachdem diese Punkte auf der einen oder anderen Seite der Momentenebene liegen. Das Moment jeder einzelnen Kraft erhält natürlich dasjenige Vorzeichen, welches ihm als Product jener beiden Factoren zukommt, und ist mit diesem Vorzeichen in die algebraische Summe der Momente einzuführen. Die Richtung der Kräfte ist dabei ganz gleichgültig. Denkt man sich dieselben gleichzeitig und in gleicher Weise um ihre Angriffspunkte gedreht, so werden dadurch ihre Momente nicht geändert, weder im Einzelnen, noch im Gesammten. Dabei dreht sich in gleicher Weise die Resultante der Kräfte um den Mittelpunkt derselben. Nimmt man also, wie das in der Folge jetzt immer stillschweigend vorausgesetzt werden soll, den Mittelpunkt paralleler Kräfte als den Angriffspunkt ihrer Resultante, so ist das Moment der letzteren in Bezug auf eine gegebene Momentenebene auch ein ganz bestimmtes, von ihrer und der Richtung der Kräfte unabhängiges. Es liegt also nahe, eine Beziehung aufzusuchen zwischen dem Gesammtmoment eines Systems paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene und dem ihrer Resultante in Bezug auf dieselbe Ebene. Diese Beziehung ist sehr einfach und in dem Satz ausgesprochen:

1. Das Gesammtmoment eines Systems paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene ist gleich dem Moment ihrer Resultante in Bezug auf dieselbe Ebene.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr leicht zu führen. Denken wir uns die gegebenen Parallelkräfte P_1, P_2... (Fig. 53) parallel zur Momentenebene gestellt und in derselben Richtung auf diese projicirt, in welcher die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von derselben gemessen werden. Dann ist nach dem im § 71 enthaltenen Satz die Projection der Resultante die Mittelkraft der Projectionen der einzelnen Kräfte. Nun können wir uns jede der gegebenen Parallelkräfte sowie auch ihre Resultante zerlegt denken in die ihnen bezw. gleiche und parallele Kraft, welche ihre Projection repräsentirt, und in ein Gegenpaar, das in der projicirenden Ebene der betr. Kraft gelegen ist, und dessen Moment der Grösse und dem Vorzeichen nach durch dasjenige Dreieck mit seinem Kreispfeil repräsentirt wird, das die gegebene Kraft oder Resultante im Raum als Grundlinie und die Projection des Angriffspunktes derselben als Spitze hat. Die Projectionen der gegebenen Parallelkräfte geben mit einander vereinigt die Projection der Resultante. Die diesen Kräften zugehörigen Gegenpaare liegen sämmtlich in parallelen, nämlich projicirenden Ebenen und können folglich in die projicirende Ebene der Resultante verlegt werden. Sie vereinigen sich dort zu einem Resultantenpaar, dessen Drehungsmoment gleich der algebraischen Summe ihrer Drehungsmomente ist. Dasselbe mit der

Projection der Resultante vereinigt muss die Resultante selbst ergeben. Bei dieser Vereinigung wird die Projection der Resultante in der projicirenden Ebene so weit parallel mit sich selbst verschoben, bis das aus der verschobenen Kraft als Grundlinie und dem Angriffspunkt der Projection als Spitze gebildete Dreieck durch seinen doppelten Flächeninhalt das Drehungsmoment des Resultanten-Gegenpaars repräsentirt. Es muss folglich der Flächeninhalt des Dreiecks, welches die Resultante der gegebenen Parallelkräfte im Raum als Grundlinie und die Projection ihres Angriffspunktes auf die Momentenebene zur Spitze hat, gleich der algebraischen Summe der Flächeninhalte der Dreiecke sein, welche die einzelnen Parallelkräfte als Grundlinien und die Projectionen ihrer Angriffspunkte zu Spitzen haben, wobei diesen Dreiecksflächen das positive oder negative Vorzeichen zu geben ist, je nachdem der ihnen zugehörige Kreispfeil die eine oder andere Drehrichtung angibt. Nun bilden die Grundlinien aller der genannten Dreiecke mit denjenigen von ihren Seiten, welche zugleich die in der bestimmten Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte der betreffenden Kräfte von der Momentenebene sind, entweder gleiche oder Supplementswinkel. Die Flächen der Dreiecke sind also den Producten aus ihren Grundlinien in jene Seiten proportional; und daraus folgt der Satz: Die algebraische Summe der Producte der Kräfte in die in bestimmter Richtung gemessenen Entfernungen ihrer Angriffspunkte von der Momentenebene, kurz das Gesammtmoment der Kräfte, ist gleich dem Product aus der Resultante in die in gleicher Richtung gemessene Entfernung ihres Angriffspunktes, des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, d. h. gleich dem Moment der Resultante in Bezug auf die Momentenebene.

Fig. 53.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes sind die beiden folgenden:

2. Wenn die Angriffspunkte paralleler Kräfte in parallelen Ebenen beliebig verschoben werden, so bewegt sich der Mittelpunkt der Kräfte in einer zu jenen parallelen Ebene.

3. Das Gesammtmoment paralleler Kräfte in Bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende Momentenebene ist gleich Null, und umgekehrt:

3ª Ist das Gesammtmoment paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene Null, so muss diese durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte gehen.

§ 74. Besonderer Fall: Parallele Kräfte, deren algebraische Summe Null ist. — Das im § 71 gelehrte Verfahren für die Aufsuchung des Mittelpunktes paralleler Kräfte verliert seine Anwendbarkeit in dem Falle, wo die algebraische Summe dieser Kräfte Null wird, das Kräftepolygon aus ihnen sich schliesst. Denkt man sich in diesem Falle den Mittelpunkt aller der Kräfte, mit Ausnahme der letzten, gefunden, so erhält man stets einen solchen, da die Summe der jetzt zu vereinigenden Kräfte gewiss nicht Null ist; sie ist vielmehr der letzten Kraft an Grösse gleich, zu ihr parallel, aber von entgegengesetztem Sinne, bildet also, wenn man sie in jenem Mittelpunkt angebracht denkt, im Allgemeinen ein Gegenpaar mit ihr; nur in dem Falle, wo den parallelen Kräften eine Richtung gegeben wird, die mit derjenigen der Verbindungslinie jenes Mittelpunktes mit dem Angriffspunkt der letzten Kraft übereinstimmt, sind jene beiden Kräfte im Gleichgewicht. Für jede Momentenebene, die parallel zur eben genannten Verbindungslinie liegt, ist offenbar die algebraische Summe der Momente der obigen beiden Kräfte, nämlich der Resultante aus allen Kräften, mit Ausnahme der letzten, und dieser letzten, Null. Diese algebraische Summe ist aber keine andere als die der Momente sämmtlicher Kräfte. Nun kann man aus diesen letzteren auf

eine Menge von Arten ein Paar gleiche und gleichgerichtete Kräfte von entgegengesetztem Sinne erhalten. Man darf nur die Kräfte in irgend zwei Gruppen theilen, von denen die eine möglicherweise wie oben auch nur eine einzige Kraft enthalten kann, so dass ihr Mittelpunkt der Angriffspunkt dieser Kraft selbst ist. Die algebraische Summe der Kräfte ist dann in keiner dieser Gruppen Null, man kann also ihre Mittelpunkte suchen. In denselben wirken dann zwei gleiche und gleichgerichtete Kräfte von entgegengesetztem Sinne, die Resultanten der Gruppen. Die algebraische Summe der Momente dieser Resultanten ist bezüglich jeder Ebene gleich dem Gesammtmoment sämmtlicher Kräfte für dieselbe Ebene, also Null für jede der oben gebrauchten Ebenen, welche parallel zur Verbindungslinie des Mittelpunktes aller Kräfte, mit Ausnahme der letzten, mit dem Angriffspunkt jener letzten waren. Daraus folgt, dass die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier solcher Gruppen, in welche die Kräfte getheilt werden können, parallel zu einander sind und ihre Richtung eine dem gegebenen Kräftesystem eigenthümliche ist. Und da im Allgemeinen der Mittelpunkt zweier paralleler Kräfte auf der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte liegt, so kann man den unendlich fernen Punkt, welcher allen jenen parallelen Verbindungslinien gemeinschaftlich ist, den Mittelpunkt der gegebenen parallelen Kräfte, deren algebraische Summe Null ist, nennen.

In dem ganz speciellen Fall, wo die Mittelpunkte zweier Gruppen, in die man die parallelen Kräfte von obiger Art getheilt hat, zusammenfallen, wirken in diesem Punkte immer zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die Resultante jener Gruppen. Die gegebenen Kräfte sind folglich immer im Gleichgewicht, welche Richtung man ihnen auch geben mag; oder, wie wir der Kürze halber sagen wollen, sie sind im indifferenten Gleichgewicht. Die algebraische Summe der Momente jener beiden Kräfte und folglich auch die der gegebenen Kräfte ist dann Null für jede Ebene. Daraus folgt, dass die Mittelpunkte je zweier Gruppen, in welche die gegebenen Kräfte getheilt werden können, zusammenfallen, wenn dies für irgend ein Gruppenpaar der Fall ist, und dass alsdann auch der Angriffspunkt jeder der gegebenen Kräfte der Mittelpunkt der übrigen Kräfte ist.

§ 75. Reduction der statischen Momente paralleler Kräfte auf eine gemeinschaftliche Basis und Construction dieser reducirten Momente. — Die im § 73 definirten statischen Momente von Kräften haben geometrisch die Bedeutung von Flächen, wie die früher behandelten Drehungsmomente, und müssen wie diese behufs weiterer graphischer Behandlung in Linien ausgedrückt, d. h. auf eine gemeinschaftliche Basis reducirt werden. Dies kann einfach dadurch geschehen, dass man sie, wie sogleich gezeigt werden wird, auf die Drehungsmomente paralleler Kräfte in einer Ebene zurückführt, so dass sie, einzeln sowohl, wie auch die algebraischen Summen aller oder mehrerer auf einander folgender, ganz so reducirt werden können, wie dies für die Drehungsmomente paralleler Kräfte in einer Ebene im § 53 gezeigt wurde.

Denken wir uns ein System paralleler Kräfte mit ihren Angriffspunkten gegeben und eine Momentenebene E, von welcher die Entfernungen jener Angriffspunkte in irgend einer beliebigen Richtung gemessen werden. Nehmen wir eine zweite, die Momentenebene schneidende, übrigens aber ganz beliebige Ebene E′ als Projectionsebene und geben wir den gegebenen Kräften, indem wir sie um ihre Angriffspunkte drehen, eine Richtung parallel zur Durchschnittslinie X der beiden Ebenen, der Projections- und der Momentenebene, so dass sie zu jeder dieser Ebenen parallel werden. In dieser Stellung projiciren wir sie nach irgend einer der Momentenebene parallelen Richtung auf die Projectionsebene; dann werden ihre Projectionen an Grösse, Richtung und Sinn ihnen selbst gleich und sämmtlich parallel zur Durchschnittslinie der Projections- und Momentenebene. Die senkrecht gemessenen Entfernungen der Projectionen von letzterer Durchschnittslinie haben zu den in bestimmter, vorgegebener Richtung gemessenen Enfernungen der Angriffspunkte der betreffenden Kräfte von der Momentenebene offenbar durchweg das nämliche Verhältniss, und folglich sind auch die Drehungsmomente der Kräfteprojectionen in der Projectionsebene um einen Punkt jener Durch-

schnittslinie den Momenten der entsprechenden Kräfte in Bezug auf die gegebene Momentenebene proportional. Beide stehen in demselben Verhältniss zu einander wie diejenigen beiden Entfernungen irgend eines Punktes von der Momentenebene, von denen die eine D′ in einer zur Projectionsebene parallelen und auf der Durchschnittslinie X derselben mit der Momentenebene senkrechten Richtung, die andere D in derselben Richtung wie die Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene gemessen wird.

Nun erhält man die Drehungsmomente der parallelen Kräfteprojectionen in der Ebene E′ für irgend einen Punkt der Axe X, wenn man sie durch ein Kräfte- und Seilpolygon mit einander verbindet. Der Abschnitt, welchen zwei Seiten des letzteren auf der Linie X machen, ist die algebraische Summe der reducirten Drehungsmomente der Kräfte, welche zwischen jenen Seiten liegen, oder das Drehungsmoment einer Kraft, wenn die Polygonseiten derselben unmittelbar vorausgehen und nachfolgen. Die Momentenbasis H′ ist gleich der senkrechten Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie. Dieselben Abschnitte geben also, und zwar der Grösse und Richtung d. h. dem Vorzeichen nach, die Momente der entsprechenden gegebenen Kräfte in Bezug auf die Momentenebene, wenn man nur statt der Basis H′ eine andere H nimmt, zu welcher sie in demselben Verhältniss steht wie die beiden Entfernungen D′ und D zu einander. Was den Sinn, das Vorzeichen jener Abschnitte anbelangt, so hat man denjenigen als positiv zu nehmen, welcher einer Kraft zugehört, die in dem als positiv herausgehobenen Sinne wirkt, und deren Angriffspunkt auf der positiven Seite der Momentenebene liegt.

Wenn man sich erinnert, dass die Basis H′ oder die senkrecht gemessene Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie dieselbe Richtung wie die Entfernung D′ hat, so kann man sehr einfach die Basis H aus ihr construiren. Man darf nur durch den Pol eine Linie parallel zur Richtung der Entfernung D und durch den Fusspunkt der vom Pol auf die Kräftelinie gefällten Senkrechten eine Parallele zur Momentenebene legen, welche jene Parallele schneidet; dann ist das Stück zwischen diesem Schnittpunkt und dem Pol auf der ersten Parallellinie die gesuchte Basis H. Wurde das Kräftepolygon in die Durchschnittslinie X gezeichnet, was immer zu empfehlen ist, so ist die Basis H nichts anderes als die Entfernung seines Poles von der Momentenebene, gemessen in derselben Richtung, in welcher die Entfernungen der Angriffspunkte von dieser Ebene gemessen werden. In dem Falle, wo die Projectionsebene parallel zu der Richtung genommen wird, in welcher die Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene gemessen werden, vereinfacht sich diese Construction bedeutend. Es ist dann die gesuchte Basis gleich der in jener Richtung gemessenen Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie. Wegen dieser Einfachheit wird man die Projectionsebene, wo nur immer möglich, so wählen wie oben vorausgesetzt. In der Regel wird, wenn man es mit den Momenten paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene zu thun hat, die Basis H derselben gegeben sein; dann muss man aus derselben durch eine ähnliche Construction wie oben oder durch irgend eine der bekannten Proportionalconstructionen die Basis H′ der Drehungsmomente finden und ihr die senkrechte Entfernung des Pols von der Kräftelinie im Kräftepolygon, das behufs Aufsuchung jener Drehungsmomente construirt werden muss, gleich machen.

Für gewöhnlich wird man Orthogonalprojectionen schiefen vorziehen. Dann hat man von vorn herein die Projectionsebene E′ senkrecht zur Momentenebene E zu nehmen. Die Richtung der einen Entfernung, D′, irgend eines Punktes von der Momentenebene, diejenige, welche parallel zur Projectionsebene und senkrecht auf ihrer Schnittlinie mit der Momentenebene genommen wird, steht dann einfach senkrecht auf der Momentenebene. Sie bildet folglich die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die andere Entfernung D desselben Punktes von der Momentenebene, nämlich diejenige ist, welche in derselben Richtung wie die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte von dieser Ebene genommen wird. Beide, Kathete und Hypotenuse, bilden einen ganz

bestimmten, durch die Richtung, in welcher jene Entfernungen der Angriffspunkte gemessen werden müssen, allein schon vorgezeichneten spitzen Winkel φ mit einander. Um folglich aus der Basis H', der senkrechten Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie, die andere Basis H zu construiren, darf man einfach nur durch den einen Endpunkt jener Basis H', durch den Pol, in der Ebene des Kräftepolygons eine Linie ziehen, die den Winkel φ mit jener Basis bildet. Die Strecke dieser Linie zwischen dem Pol und ihrem Durchschnitt mit der Kräftelinie ist die Basis H. Dieselbe kann also auch die Entfernung des Pols von der Kräftelinie genannt werden, gemessen aber in einer Richtung, welche den spitzen Winkel φ mit der Senkrechten auf die Kräftelinie bildet. Wenn also umgekehrt die Basis H der Momente der parallelen Kräfte in Bezug auf die Momentenebene gegeben ist, so hat man den Pol des Kräftepolygons in der Projectionsebene so anzunehmen, dass seine Entfernung von der Kräftelinie, gemessen in einer Richtung, welche den spitzen Winkel φ mit der Senkrechten auf jene bildet, gleich der Basis H wird.

Der Winkel φ wird Null, wenn die Entfernungen der Angriffspunkte der gegebenen Parallelkräfte von der Momentenebene in senkrechter Richtung gemessen werden. Dann fällt die Basis H mit der H' zusammen, d. h. die Drehungsmomente der Kräfteprojectionen in der Projectionsebene um irgend einen Punkt der Schnittlinie derselben mit der Momentenebene sind gleich den Momenten der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Momentenebene, und zwar bezogen auf dieselbe Basis: die senkrechte Entfernung des Pols im Kräftepolygon, das in der Projectionsebene gezeichnet wird, von der Kräftelinie desselben.

Dies letztere Resultat, gültig für den einfachsten Fall, dass die Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene senkrecht zu dieser gemessen und orthogonale Projectionen gebraucht werden, leuchtet eigentlich ganz von selbst ein. Aus ihm ist das andere für schief gemessene Entfernungen und Orthogonalprojectionen sehr einfach abzuleiten, einfacher als wenn man zuerst den allgemeinsten Fall für schief gemessene Entfernungen der Angriffspunkte von der Momentenebene und schiefe Projectionen nimmt. Doch ist der letztere an sich von Interesse und für folgende Untersuchungen von Wichtigkeit; er konnte deshalb nicht übergangen werden.

Beispielsweise denken wir uns in Fig. 52 (S. 85) vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 mit ihren Angriffspunkten gegeben, letztere durch ihre Orthogonalrisse A'_1, A'_2 ... und A''_1, A''_2 ... in zwei auf einander senkrecht stehenden Tafeln. Die eine derselben, die zweite, sei die Momenten-, die andere, die erste, die Projectionsebene. Dann müssen wir die Kräfte parallel zur Projectionsaxe stellen; ihre orthogonalen Projectionen auf die erste Tafel sind dann gleichfalls parallel zu jener Axe und gehen durch die Risse der Angriffspunkte. Das Kräftepolygon, welches aus den mit den gegebenen Kräften gleichgrossen Projectionen in der ersten Tafel zu zeichnen ist, sei 0' 1' 2' 3' 4', ferner C', in einer senkrechten Entfernung gleich der Momentenbasis von der Kräftelinie, der Pol und 0' I' II' III' IV' V das zugehörige Seilpolygon. Verlängert man die Seiten desselben bis zu ihren Durchschnitten mit der Projectionsaxe, so sind die Abschnitte $m_0 m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_4$ die reducirten Drehungsmomente der Kräfteprojectionen in der ersten Tafel um irgend einen Punkt der Projectionsaxe. Dieselben Abschnitte, bezogen auf dieselbe Basis, sind aber auch die Momente der gegebenen Parallelkräfte bezüglich der zweiten Tafel als Momentenebene, vorausgesetzt, dass die Entfernungen der Angriffspunkte von dieser Ebene in senkrechter Richtung gemessen werden. Werden aber diese Entfernungen in schiefer, mit der Senkrechten den spitzen Winkel φ bildenden Richtung gegen die Momentenebene gemessen, so bedeuten die Abschnitte $m_0 m_1$, $m_1 m_2$ ... immer noch die reducirten Momente der Kräfte bezüglich der zweiten Tafel als Momentenebene; aber sie müssen auf eine Basis C'q' bezogen werden, welche die Entfernung des Poles C' im Kräftepolygon von der Kräftelinie in schiefer Richtung, die den spitzen Winkel φ mit der senkrechten bildet, misst.

Wird bei allen Verdrehungen, welche man mit den Kräften P_1, P_2 ... vornehmen kann, stets die Richtung der P_1 als positiv aufgefasst, und wird die Entfernung ihres Angriffspunktes A_1 von der

zweiten Tafel ebenfalls positiv genommen, dann ist der Sinn des Abschnittes $m_0 m_1$ jener Kraft derjenige der positiven Momente.

Es versteht sich von selbst, dass die algebraischen Summen $m_0 m_2$, $m_0 m_3$, $m_0 m_4$ obiger Abschnitte $m_0 m_1$, $m_1 m_2$ ... die algebraischen Summen der Momente oder die Gesammtmomente der zwei oder drei ersten, bezw. aller vier gegebenen Parallelkräfte in Bezug auf die zweite Tafel als Momentenebene vorstellen.

§ 76. **Besonderer Fall, wo die Angriffspunkte sämmtlicher parallelen Kräfte in einer Ebene liegen.** — Wenn die Angriffspunkte der gegebenen Parallelkräfte sämmtlich in einer und derselben Ebene E′ gelegen sind, welche von der Momentenebene E nach einer Linie X geschnitten wird, und es werden die Entfernungen jener Angriffspunkte von der Momentenebene durchweg nach Richtungen gemessen, die zur Ebene E′ parallel sind, dann sind jene Entfernungen gleichbedeutend mit den in gleicher Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte von der Linie X. In diesem Sinne kann man folglich dann auch von den statischen Momenten der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Linie X in der Ebene ihrer Angriffspunkte sprechen. Sie sind unter der oben gemachten beschränkenden Voraussetzung für die Entfernungen gleichbedeutend mit den Momenten derselben Kräfte in Bezug auf eine Momentenebene, welche die Ebene der Angriffspunkte nach der Linie X schneidet. Letztere wird deshalb auch Momentenaxe genannt.

Es ist sehr leicht, die Constructionsweise der reducirten Momente für diesen besonderen Fall aus den im vorigem § behandelten allgemeineren Fällen abzuleiten. Nehmen wir die Ebene E′ der Angriffspunkte als Projectionsebene, so haben wir die gegebenen Kräfte parallel zur Linie X zu stellen. Sie fallen dann offenbar mit ihren Projectionen auf die Ebene E′ zusammen. Zeichnet man also in dieser Ebene das Kräfte- und Seilpolygon aus ihnen, so sind die Abschnitte, welche die Seiten des letzteren auf der Linie X bilden, die reducirten Drehungsmomente der Kräfte um irgend einen Punkt der Linie X, bezogen auf eine Momentenbasis gleich der senkrechten Entfernung des Pols im Kräftepolygon von dessen Kräftelinie. Dieselben Abschnitte, bezogen auf dieselbe Basis, sind die Momente der Kräfte in Bezug auf die Axe X, vorausgesetzt, dass die Entfernungen der Angriffspunkte von dieser Linie senkrecht zu ihr gemessen werden. Werden aber diese Entfernungen in irgend einer anderen schiefen Richtung gemessen, so bleiben jene Abschnitte immer noch die Momente der Kräfte bezüglich der Axe X, aber sie beziehen sich auf eine Basis, welche gleich der in derselben schiefen Richtung gemessenen Entfernung des Pols im Kräftepolygon von dessen Kräftelinie ist.

VIII. Abschnitt.

Vom Schwerpunkt.

§ 77. Definition des Schwerpunktes eines Körpers; homogene Körper. — In den Volum-Elementen, in welche wir uns einen schweren Körper zerlegt denken können, wirken vertical abwärts gerichtete, also parallele Kräfte, von durchaus gleichem Sinn, die Gewichte dieser Elemente. Der Mittelpunkt derselben ist der Schwerpunkt des Körpers. Durch denselben geht in jeder Lage des Körpers die Resultante der sämmtlichen, an den einzelnen Theilchen desselben angreifenden Schwerkräfte hindurch; er kann also immer als der Angriffspunkt jener Resultante betrachtet werden, welche vertical abwärts gerichtet, gleich der Summe der Componenten, also gleich dem Gewichte des ganzen Körpers ist. Das Verfahren zur Aufsuchung des Schwerpunktes ist daher im Allgemeinen ganz das nämliche wie das im vorigen Abschnitt kennen gelernte für die Bestimmung des Mittelpunktes paralleler Kräfte überhaupt. Man hat nur im Auge zu behalten, dass man es im gegenwärtigen Falle stets mit einer sehr grossen Anzahl sehr kleiner Kräfte zu thun hat.

Wenn die gleichgrossen Elemente, in welche man sich einen Körper zerlegt denkt, gleichschwer sind, so heisst der Körper homogen. In diesem Falle hat man es also mit Kräften zu thun, die nicht bloss parallel und gleichgerichtet, sondern auch noch von gleicher Grösse sind, was die Aufsuchung des Schwerpunktes offenbar erleichtert. Wir werden im Folgenden nur solche homogene Körper behandeln.

§ 78. Materielle Linien und Flächen und ihr Schwerpunkt im Allgemeinen. — Es ist manchmal möglich, die Elemente eines Körpers so in Gruppen zu vereinigen, dass die Schwerpunkte dieser Gruppen alle in eine Ebene oder in eine gerade Linie fallen. Denkt man sich dann in diesen Schwerpunkten Kräfte gleich den Gewichten jener Gruppen wirken, so liegt deren Mittelpunkt, der Schwerpunkt des ganzen Körpers, gleichfalls in jener Ebene bezw. Linie. Er kann also im ersten Fall schon mittelst der Construction zweier Kräfte- und zugehöriger Seilpolygone, im letzteren durch Construction eines solchen gefunden werden.

Ist die Zahl jener Gruppen selbst wieder eine sehr grosse, so kann man sich die Ebene bezw. Linie, in welcher ihre Schwerpunkte liegen, in Elemente zerlegt denken, deren jedes einen jener Schwerpunkte enthält, und kann diesen Elementen die Gewichte der betr. Gruppen zuschreiben. Man erhält auf diese Weise eine materielle ebene Fläche oder gerade Linie, deren Schwerpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt. Haben sämmtliche Gruppen, in die man sich die Elemente eines Körpers zusammengefasst denkt, gleiche Gewichte, dann sind gleichgrosse Elemente jener Ebene bezw. Linie gleichschwer. Es werden dieselben dann consequenterweise ebenfalls homogen genannt.

So kann man z. B. die einzelnen Elemente, in welche eine gerade Eisenbahnschiene mit durchweg gleichen Querschnitten zerlegt gedacht werden kann, in Gruppen zusammenfassen, deren

jede eine Reihe von Elementen, die in gerader, zur Längsaxe der Schiene paralleler Linie liegen, enthält. Der Schwerpunkt jedes solchen prismatischen Elements, als welches eine solche Gruppe aufgefasst werden kann, liegt in dem mittleren Querschnitt der Schiene. Den einzelnen Elementen des letzteren kann man folglich die Gewichte jener Elementarprismen beilegen. Das Gewicht des ganzen Querschnitts ist dann gleich dem der Schiene, und sein Schwerpunkt fällt mit dem Schwerpunkt derselben zusammen.

Der Begriff materieller ebener Flächen oder gerader Linien, zu dem wir durch obige Betrachtungen gelangt sind, kann leicht auf Flächen oder Linien überhaupt ausgedehnt werden. Man versteht dann darunter nicht mathematische Flächen und Linien, sondern solche, die eine gewisse, jedoch sehr kleine Dicke, bezw. Breite und Dicke besitzen und daher mit Materie erfüllt gedacht werden können. Ein ebenes oder gekrümmtes Stück Papier oder Blech, ein gerades oder krummes Stück dünnen Drahtes geben eine annähernde Vorstellung solcher materieller Flächen oder Linien. Sind gleichgrosse Stücke solcher Flächen oder Linien, wie gross oder wie klein diese Stücke auch genommen werden mögen, gleichschwer, so heissen jene wieder homogen.

Die Betrachtung solcher materieller Flächen oder Linien überhaupt ist, wie leicht zu sehen, auch schon deshalb von Wichtigkeit, weil sehr häufig Körper mit Vortheil in solche, anstatt in Körperelemente, zerlegt werden. So kann man sich in obigem Beispiele die Eisenbahnschiene sofort in materielle gerade Linien, die zu ihrer Längsaxe parallel sind, zerlegt denken. Die Schwerpunkte derselben liegen, wie sogleich gezeigt werden wird, in deren Mitten, folglich in dem mittleren Querschnitt der Schiene. Man kann sich aber auch die Schiene durch Schnitte, senkrecht auf ihre Längsaxe, in gleichdicke aber sehr dünne Scheiben, also in materielle ebene Flächen zerlegt denken, deren Schwerpunkte alle in einer geraden, zur Längsaxe parallelen Linie liegen, die folglich auch den Schwerpunkt der Schiene enthalten muss.

Wir werden in Folgendem zuerst die Schwerpunkte materieller Linien, dann diejenigen materieller Flächen und dann erst die Schwerpunkte von Körpern aufsuchen. Wie bei den letzteren, so werden wir auch bei den Linien und Flächen immer voraussetzen, dass sie homogen seien.

Schwerpunkt materieller Linien.

§ **79. Die gerade Linie.** — Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte. Denn denkt man sich von dieser aus nach beiden Enden hin die Linie in lauter gleichlange Elemente getheilt, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunkt je eines Paares dieser Elemente, die zu beiden Seiten gleichweit von der Mitte abstehen, in dieser. In denselben Punkt muss folglich auch der Schwerpunkt der ganzen Linie fallen.

Wenn die Elemente, in welche wir die materielle Linie getheilt haben, als Angriffspunkte von vertical abwärts gerichteten Kräften betrachtet werden, die gleich den Gewichten dieser Elemente sind, also durchweg die nämliche Grösse haben, und es wird aus diesen Kräften ein Kräfte- und das dazu gehörige Seilpolygon construirt, so geht letzteres in eine stetige Curve, und zwar in eine Parabel über, deren Axe die Richtung der Kräfte hat. Das ist leicht zu beweisen: Denken wir uns die materielle gerade Linie A B (Fig. 54^b) in eine endliche Anzahl gleicher Theile getheilt, die wir wieder Elemente nennen wollen, und in den Mitten $e_1, e_2, e_3 \ldots$ derselben vertical abwärts gerichtete Kräfte wirken, die proportional den Längen der Elemente, also von gleicher Grösse sind und in Fig. 54^a zu einem Kräftepolygon 0 1 2 3... vereinigt wurden. Den Pol C des letzteren nehmen wir der Mitte irgend einer der Kräfte, etwa der n^{ten}, die mit m n bezeichnet ist, senkrecht gegenüberliegend an und zeichnen das Seilpolygon 0 I II III... Dann ist der Knotenpunkt n desselben, in welchem die n^{te} Seite endigt und die $(n + 1^{te})$ beginnt, am tiefsten gelegen. Wir nehmen ihn als

Anfangspunkt eines rechtswinkeligen Coordinationsystems, dessen X-Axe die Richtung der Kräfte habe, aber mit ihrem positiven Sinn nach aufwärts gekehrt sei, während die positive Y-Axe nach der Seite des Anfangs des Seilpolygons und der Linie A B gerichtet sein möge. Legt man dann durch den Knotenpunkt n und die ihm vorausgehenden m, l, k... Parallele zur Y-Axe, welche die durch m, l, k... gehenden Kräftelinien in m', l', k'... schneiden, so geht aus dem Zusammenhang zwischen Kräfte- und Seilpolygon hervor, dass die Dreiecke

$$m m' n,\ l l' m,\ k k' l \dots$$

in Fig. 54[b] den Dreiecken

$$m T C,\ \mathfrak{l} T C,\ \mathfrak{k} T C \dots$$

in Fig. 54[a] ähnlich sind. Daraus folgen die Relationen:

Fig. 54

$$m m' = \frac{mT}{TC} \times m'n; \quad l l' = \frac{\mathfrak{l}T}{TC} \times l'm; \quad k k' = \frac{\mathfrak{k}T}{TC} \times k'l \dots,$$

oder wenn man die gleichen Längen m'n, l'm, k'l... mit e bezeichnet und mit H die senkrechte Entfernung des Pols im Kräftepolygon von dessen Kräftelinie, endlich mit G das Gewicht eines Linienelements:

$$m m' = \frac{1}{2}\frac{G}{H}e; \quad l l' = \frac{3}{2}\frac{G}{H}e; \quad k k' = \frac{5}{2}\frac{G}{H}e \dots$$

Bezeichne nun x die Abscisse des q^{ten}, dem n vorausgehenden Knotenpunkts und y dessen Ordinate, so ist

$$\begin{aligned} x &= m m' + l l' + k k' \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2q-1}{2}\right)\frac{Ge}{H} \\ &= \frac{1}{2} q^2 \frac{Ge}{H}. \end{aligned}$$

Hierin ist offenbar q e gleich der Abscisse y und q G gleich dem Gewicht eines entsprechend grossen Stückes der materiellen Linie. Bezeichnet daher p das Gewicht, welches auf die Längeneinheit der Horizontalprojection der letzteren trifft, so ist

$$q G = p y$$

und daher

$$x = \frac{1}{2} y^2 \frac{p}{H}$$

oder

$$y^2 = 2 \frac{H}{p} x.$$

Diese Gleichung ist gänzlich unabhängig von der Zahl der Stücke, in welche wir die materielle Linie theilen. Sie gilt also auch für den Fall, dass jene Stücke wirkliche Elemente werden, und zeigt, dass alsdann das Seilpolygon in eine Parabel übergeht, deren Axe die nämliche Richtung wie die Kräfte hat.

Es ist eine bekannte Eigenschaft der Parabel, dass sich irgend zwei Tangenten an dieselbe in einem Punkte schneiden, der so liegt, dass die durch ihn zur Axe der Parabel gezogene Parallele die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Tangenten halbiert. Die Tangenten in denjenigen Punkten A′ und B′ der Parabel A′nB′, wo diese die Kräftelinien schneidet, welche durch die Endpunkte A und B der materiellen Linie gezogen wurden, sind die äussersten Seiten des Seilpolygons, das mit jener Parabel zusammenfällt. Durch ihren Schnittpunkt α geht folglich die Resultante der sämmtlichen, auf die Linie wirkenden Schwerkräfte hindurch. Dieselbe schneidet die Verbindungslinie A′B′ und folglich auch die materielle Gerade AB in der Mitte. Dies ist ein neuer und im Sinne der graphischen Statik directer Beweis für den Satz, dass der Schwerpunkt einer materiellen geraden Linie in deren Mitte liegt.

Das Vorhergehende lässt sich ohne weiters auf den Fall ausdehnen, wo über einem horizontalen Träger eine Last gleichförmig vertheilt ist. Das Seilpolygon aus letzterer wird eine Parabel. Das Eigengewicht des Trägers kann, wenn es pro Längeneinheit durch seine ganze Länge hindurch constant ist, entweder mit jener gleichförmig vertheilten Last vereinigt, oder für sich behandelt werden. In letzterem Fall ist das ihm zugehörige Seilpolygon ebenfalls eine Parabel.

§ **80. Die gebrochene gerade Linie.** — Der Schwerpunkt einer gebrochenen Linie wird gefunden, indem man sich in dem Mittelpunkt jedes einzelnen Stücks eine vertical abwärts gerichtete Kraft, das Gewicht dieses Stückes, wirkend denkt von einer, der Länge desselben proportionalen Grösse. Der Mittelpunkt der so erhaltenen parallelen Kräfte ist der gesuchte Schwerpunkt. Zu seiner Construction sind also zwei Kräfte- und zugehörige Seilpolygone erforderlich, vorausgesetzt, dass die gebrochene Linie in einer Ebene liegt; ist dies nicht der Fall, so müssen drei solche Polygonenpaare gezeichnet werden.

In dem speciellen Fall, wo die gebrochene Linie ABCD... (Fig. 55) eben ist und aus einer beliebigen Anzahl gleichlanger Stücke besteht, die unter gleichen Winkeln ABC, BCD... an einander stossen, so dass ihnen ein Kreis einbeschrieben werden kann, der sie in ihren Mittel- oder Schwerpunkten berührt, kann der Schwerpunkt der ganzen Linienverbindung auf einfacherem Wege, ohne Zuhülfenahme der Kräfte- und Seilpolygone construirt werden. Es verhilft uns dazu hauptsächlich der Momentensatz, der im § 73 nachgewiesen wurde. Zunächst ist klar, dass die in Rede stehende gebrochene Linie immer eine Symmetrieaxe hat. Dies ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes O des einbeschriebenen Kreises entweder mit dem Mittelpunkt s_m des mittleren Linienstückes, wenn, wie in der Figur, die Anzahl derselben ungerade ist, oder mit der Ecke, zu deren beiden Seiten gleichviel Stücke liegen, wenn die Anzahl derselben gerade ist. Auf dieser Symmetrieaxe liegen die gemeinschaftlichen Schwerpunkte je zweier Linienstücke, die zu beiden Seiten derselben gleiche Lage haben. Sie ist folglich ein geometrischer Ort für den gesuchten Schwerpunkt.

Fig. 55.

Behufs Anwendung des oben erwähnten Satzes nehmen wir als Momentenaxe (s. § 76) irgend eine durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises in der Ebene der Figur gezogene Gerade XX. Die Länge der einzelnen Linienstücke bezeichnen wir mit l und mit demselben Buchstaben die ihnen proportionalen Schwerkräfte, die wir uns in den Schwerpunkten s_1, s_2, s_3... der Stücke wirken denken müssen. Die senkrecht gemessenen Entfernungen dieser Schwerpunkte von der Linie XX seien e_1, e_2, e_3... Dann ist das Gesammtmoment jener Schwerkräfte in Bezug auf die Momentenaxe gleich der algebraischen Summe

$$\Sigma l e.$$

Die Resultante jener Kräfte ist proportional mit der Gesammtlänge l_0 der gebrochenen Linie und werde wie diese bezeichnet. Ist dann die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes S von der Linie XX gleich e_0, so muss

$$l_0 e_0 = \Sigma l e$$

sein. Nun gilt für irgend ein Linienstück CD, dessen Schwerpunkt s die Entfernung e von der Momentenaxe hat, und dessen Projection auf die letztere mit l' bezeichnet werde, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CDD' und Oss' die Proportion

$$l : l' = r : e,$$

unter r den Radius des einbeschriebenen Kreises verstanden. Daraus folgt

$$l e = l' r,$$

und dies in obige Momentengleichung substituirt, ergibt

$$l_0 e_0 = \Sigma l' r = r \Sigma l' = r l'_0,$$

wo l'_0 die Projection $A'M'$ der ganzen gebrochenen Linie auf die Momentenaxe bezeichnet. Die Entfernung e_0 des gesuchten Schwerpunktes von der Linie XX und damit der Schwerpunkt selbst kann folglich durch Construction der Proportion

$$l_0 : l'_0 = r : e_0$$

gefunden werden.

Zeichnet man zu diesem Behufe ein rechtwinkeliges Dreieck $A'LL'$, dessen eine Kathete in der Linie XX liegt, während seine andere LL' gleich dem Radius r des Kreises und seine Hypotenuse $A'L$ gleich der Länge l_0 der gebrochenen Linie ist, und trägt man auf letzterer ein Stück $A'U = A'M'$ gleich der Projection l'_0 auf, so ist die vom Endpunkt U dieses Stückes auf XX gefällte Senkrechte UU' gleich der gesuchten Entfernung e_0. Eine durch U zur Momentenaxe XX gezogene Parallele schneidet also die Symmetrieaxe Os_m in dem gesuchten Schwerpunkt S.

§ **81. Der Kreisbogen.** — Vorstehende Construction ist von der Anzahl und Länge der Seiten, aus denen die betrachtete gebrochene Linie besteht, ganz unabhängig. Sie kann deshalb unmittelbar auch zur Aufsuchung des Schwerpunktes eines Kreisbogens angewendet werden, der als Polygon von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet werden kann, wenn man nur unter l_0 die Länge dieses Bogens, unter l'_0 seine Projection auf irgend eine, durch den Mittelpunkt des Kreises gezogene Momentenaxe und unter r den Radius des Kreises selbst versteht.

Etwas vereinfacht wird die Construction dadurch, dass man sich als Momentenaxe die durch den Mittelpunkt O gezogene Senkrechte auf dem Radius Os_m (Fig. 56) genommen denkt, welcher den Bogen halbirt, und auf dem der Schwerpunkt S liegt. Dann wird die Sehne AA' des Bogens gleich seiner Projection l'_0 auf jene Momentenaxe und die Entfernung OS des gesuchten Schwerpunktes vom Kreismittelpunkt gleich e_0. Streckt man daher auf die durch den Bogenmittelpunkt s_m gezogenen Tangente auf beiden Seiten von s_m die halbe Bogenlänge $s_mB = s_mA$ und $s_mB' = s_mA'$ aus, zieht dann die Linien OB und OB' und durch die Endpunkte A, A' des Bogens Linien parallel zum halbirenden Radius Os_m, welche jene in den Punkten C und C' treffen, so schneidet die Verbindungslinie CC' dieser letzteren Punkte den halbirenden Radius Os_m im gesuchten Schwerpunkt S. Denn es verhält sich

Fig. 56.

$$BB' : CC' = Os_m : OS$$

oder

$$l_0 : l'_0 = r : e_0.$$

Man kann auch, wie in derselben Fig. 56 geschehen, die durch den Bogenmittelpunkt gezogene Tangente vom Kreismittelpunkt aus mit einem Radius OL gleich der Bogenlänge l_0 durchschneiden

und auf die Verbindungslinie OL von O aus ein Stück OU gleich der Sehnenlänge AA′ auftragen. Die Parallele zur Sehne AA′, welche durch den Endpunkt U des letzteren Stückes gezogen wird, schneidet den halbirenden Radius Os_m im gesuchten Schwerpunkt. Denn es ist wieder:

$$OL : OU = Os_m : OS$$

oder

$$l_0 : l_0' = r : e_0.$$

§ **82. Die krumme Linie im Allgemeinen.** — Um den Schwerpunkt irgend einer krummen Linie zu finden, theilt man dieselbe in eine so grosse Anzahl gleicher Stückchen, dass man jedes derselben als gerade betrachten kann. An den Mittelpunkten dieser Stückchen denkt man sich dann vertical abwärts gerichtete Kräfte, deren Gewichte, wirken und sucht auf die bekannte Weise, mittelst Construction der nöthigen Kräfte- und Seilpolygone, den Mittelpunkt jener parallelen Kräfte.

Schwerpunkt ebener Figuren.

§ **83. Das Dreieck.** — Der Sckwerpunkt einer Dreiecksfläche ABC (Fig. 57) wird gefunden, indem man dieselbe durch Schnitte, parallel zu einer Seite AB, in sehr dünne Lamellen wie $\alpha\beta$ z. B. zerlegt, welche als materielle gerade Linien betrachtet werden können. Die Schwerpunkte dieser Lamellen liegen alle auf der geraden Linie, welche die Mitte D jener Seite mit der gegenüberliegenden Ecke C verbindet. Diese ist folglich ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Dreiecks. Zwei andere solche geometrische Oerter sind aus denselben Gründen die Verbindungslinien der Mitten der beiden anderen Dreieckseiten mit den ihnen gegenüberliegenden Ecken. Die drei Transversalen schneiden sich, wie sich auch geometrisch beweisen lässt, in einem Punkt S, dem Schwerpunkt des Dreiecks. Dieser theilt nach einem bekannten geometrischen Satz jede derselben in dem Verhältniss von 1 zu 2 so, dass das kleinere Stück zunächst der Seite liegt, welche die Transversale halbirt. Daraus folgt leicht, dass das ganze Gewicht Q des Dreiecks, das man sich in seinem Schwerpunkt wirken denken darf, auf seine drei Ecken so vertheilt werden kann, dass auf jedes derselben gleichviel, also $\frac{1}{3}$ Q, als dort angreifende Componente jenes ganzen Gewichtes kommt. Bezieht man dann diese drei Componenten und ihre Resultante auf eine beliebige Momentenebene und nennt a, b, c und s die Entfernungen der drei Ecken des Dreiecks und seines Schwerpunktes von dieser Ebene, so ist nach dem Momentensatz

Fig. 57.

$$Qs = \tfrac{1}{3}Qa + \tfrac{1}{3}Qb + \tfrac{1}{3}Qc$$

oder

$$s = \tfrac{1}{3}(a + b + c).$$

§ **84. Das Parallelogramm.** — Den Schwerpunkt eines Parallelogramms findet man in ähnlicher Weise wie den des Dreiecks durch Zerschneiden in Lamellen, die parallel zu dem einen oder anderen Paar der Parallelseiten sind, oder auch, indem man das Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt. Im ersten Fall ergibt sich, dass der gesuchte Schwerpunkt in der Mitte jeder der Linien liegt, welche die Halbirungspunkte zweier gegenüber liegenden Seiten mit einander verbinden; im zweiten Fall findet er sich im Mittelpunkt jeder der beiden Diagonalen gelegen. Es versteht sich von selbst und lässt sich auch geometrisch leicht beweisen, dass sich alle diese Linien in einem und demselben Punkt, dem Schwerpunkt, schneiden.

§ 85. **Das Trapez.** — Um den Schwerpunkt eines Trapezes ABCD (Fig. 58) zu finden, denkt man sich dasselbe zunächst wieder in der Richtung seiner Parallelseiten in sehr dünne Lamellen zerschnitten, deren Schwerpunkte sämmtlich auf der Verbindungslinie EF der Mitten jener Parallelseiten gelegen sind. Diese Linie ist deshalb auch ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Trapezes. Hierauf zerlege man das letztere durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC, ACD, deren Schwerpunkte, nach § 83 gefunden, S_1 und S_2 seien. Der Schwerpunkt des Trapezes liegt dann in der Verbindungslinie S_1S_2 dieser beiden Punkte und folglich in dem Durchschnittspunkt S derselben mit dem vorhin schon gefundenen geometrischen Ort EF.

Fig. 58.

Es kann leicht ermittelt werden, in welchem Verhältniss der Schwerpunkt S die Mittellinie EF theilt. Die Schwerpunkte S_1 und S_2 liegen in den Linien EC, AF, welche die Mitten der Grundlinien der betreffenden Dreiecke mit der gegenüberliegenden Ecke verbinden, und theilen diese Verbindungslinien in dem Verhältniss von 1 : 2 so, dass das kleinere Stück zunächst der halbirten Seite liegt. Zieht man daher von diesen Schwerpunkten Linien in der Richtung der Parallelseiten des Trapezes nach der Mittellinie EF, so wird letztere hiedurch in drei gleiche Theile FG, GH und HE getheilt. Der mittlere dieser drei Theile, GH, wird ferner vom Schwerpunkt S in demselben Verhältniss getheilt, wie die Verbindungslinie S_1S_2 der Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ACD, nämlich im umgekehrten Verhältniss der Flächeninhalte jener Dreiecke oder, da dieselben gleiche Höhe haben, im umgekehrten Verhältniss ihrer Grundlinien AB und CD. Bezeichnen wir dieselben kürzer mit a und b und die Linie EF mit h, so ist folglich

$$HS = \frac{1}{3}\,h\,\frac{b}{a+b} \text{ und } SG = \frac{1}{3}\,h\,\frac{a}{a+b}.$$

Hiernach ist

$$ES = \frac{1}{3}\,h + \frac{1}{3}\,h\,\frac{b}{a+b} = \frac{1}{3}\,h\,\frac{a+2b}{a+b},$$

$$SF = \frac{1}{3}\,h + \frac{1}{3}\,h\,\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}\,h\,\frac{2a+b}{a+b}.$$

EF wird also durch S in dem Verhältniss von $a + 2b$ zu $2a + b$, oder in dem Verhältniss von $\frac{1}{2}a + b$ zu $a + \frac{1}{2}b$ getheilt. Diese Theilung kann aber sehr leicht direct ausgeführt und dadurch der Schwerpunkt S des Trapezes gefunden werden, ohne dass man erst die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke ABC und ACD zu suchen braucht. Verlängert man nämlich jede der beiden Parallelseiten um die andere, aber nach entgegengesetzten Richtungen hin, also AB nach rechts hin um $BK = CD = b$ und CD nach links hin um $DJ = AB = a$, so schneidet die Verbindungslinie JK der Endpunkte dieser Verlängerungen die Mittellinie EF in dem Punkt S. In der That verhält sich in den beiden ähnlichen Dreiecken EKS und SFJ

$$\begin{aligned} ES : SF &= EK : FJ \\ &= \frac{1}{2}\,a + b : a + \frac{1}{2}\,b \\ &= a + 2b : 2a + b. \end{aligned}$$

§ 86. **Das unregelmässige Viereck.** — Um den Schwerpunkt eines unregelmässigen Viereckes ABCD (Fig. 59) zu finden, theile man dasselbe durch eine Diagonale BD in zwei Dreiecke ABD, DBC, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 auf bekannte Weise gefunden werden. Sie liegen in

den Linien AO, OC, welche die Mitte O der Diagonale mit den gegenüberliegenden Dreiecks-Ecken verbinden, und theilen diese Linien in dem Verhältniss von 1:2. Der gesuchte Schwerpunkt liegt in der Verbindungslinie $S_1 S_2$ jener beiden Schwerpunkte. Einen zweiten geometrischen Ort für denselben könnte man offenbar auf ganz ähnliche Weise finden, wenn man das Viereck durch seine zweite Diagonale AC in zwei Dreiecke theilen und deren Schwerpunkte mit einander verbinden würde. Aber es ist einfacher, den Schwerpunkt S des Vierecks dadurch zu finden, dass man die Linie $S_1 S_2$ nach richtigem Verhältniss theilt. Dieses Verhältniss ist leicht zu finden; da man sich in den Punkten S_1 und S_2 Kräfte angebracht denken muss, gleich den Gewichten der Dreiecke ABD und DBC, so theilt der Angriffspunkt der Resultante die Verbindungslinie jener Angriffspunkte im umgekehrten Verhältniss dieser Gewichte oder im umgekehrten Verhältniss der Flächeninhalte der Dreiecke ABD und DBC. Aber diese Dreiecke haben die gleiche Grundlinie BD; ihre Flächen verhalten sich also wie ihre Höhen, oder wie die Abschnitte AE und EC der zweiten Diagonale. Nun ist $S_1 S_2$ zu dieser zweiten Diagonale parallel, vertauscht man deshalb jene Abschnitte mit einander, so dass AE_1 gleich EC und $E_1 C$ gleich AE wird, so schneidet die Verbindungslinie $E_1 O$ die Linie $S_1 S_2$ in dem richtigen Verhältniss und der Schnittpunkt S ist der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks.

Fig. 59.

Dieser letztere theilt, wie leicht ersichtlich, die Verbindungslinie $E_1 O$ auch in dem Verhältniss von 1:2. Man kann folglich den Schwerpunkt des Vierecks auch dadurch finden, dass man den Mittelpunkt O der einen Diagonale mit dem Punkt E_1 der anderen Diagonale, den man durch Vertauschen ihrer Abschnitte erhält, verbindet und die Verbindungslinie in dem Verhältniss von 1:2 so theilt, dass der kleinere Theil der halbirten Diagonale anliegt. Das Gleiche gilt natürlich für die Verbindungslinie des Mittelpunktes O_1 der zweiten Diagonale mit dem Punkt E_2 auf der ersten, den man durch Vertauschen von deren Abschnitten erhält. Da die Mittelpunkte O, O_1 der Diagonalen zugleich Halbirungspunkte der Strecken EE_1 und EE_2 auf denselben sind, so folgt hieraus: Der Schwerpunkt des unregelmässigen Vierecks fällt zusammen mit dem Schwerpunkt des Dreiecks, dessen drei Ecken der Schnittpunkt E der Diagonalen und die beiden Punkte E_1 und E_2 derselben sind, welche man durch Vertauschen ihrer Abschnitte erhält.

Hieraus geht nun wieder hervor, dass die Verbindungslinie ES, verlängert, die Seite $E_1 E_2$ jenes Dreiecks in dem Punkte O_2 halbiren muss, während die Linie EO_2 selbst in S in dem Verhältniss von 1:2 getheilt ist. Wird folglich CD parallel zu AB, d. h. geht das unregelmässige Viereck in ein Trapez über, in welchem Falle auch $E_1 E_2$ parallel zu jenen Parallelseiten wird, so liegen die Halbirungspunkte der letzteren, derjenige der Strecke $E_1 E_2$, der Durchschnittspunkt der Diagonalen und der Schwerpunkt des Trapezes, sämmtlich in einer geraden Linie, und zwar theilt der letztere Punkt die Strecke zwischen den von ihm genannten beiden Punkten E und O_2 im Verhältniss von 1:2 so, dass der kleinere Theil dem letzten Punkt O_2 anliegt. Hieraus lässt sich auf einem anderen Wege, als im vorigen § geschehen, ebenfalls das Verhältniss herleiten, in welchem der Schwerpunkt des Trapezes die Verbindungslinie der Mittelpunkte seiner Parallelseiten theilt.

Endlich ist noch leicht zu zeigen, dass die Abschnitte $S_1 S$ und $S_1 F$ auf der Verbindungslinie $S_1 S_2$ der Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BDC einander gleich sind. Daraus ist folglich der Schwerpunkt des Vierecks leicht zu finden, wenn man die Schwerpunkte S_1, S_2 jener Dreiecke hat.

§ 87. Die Vielecke im Allgemeinen. — Der Schwerpunkt eines Polygons mit mehr als vier Seiten wird erhalten, wenn man dasselbe durch Diagonalen in Vierecke oder Dreiecke zerlegt, die Schwerpunkte derselben sucht und die in denselben wirkenden Kräfte, welche den Flächen-

inhalten der betreffenden Vier- oder Dreiecke proportional sind, durch Kräfte- und Seilpolygone vereinigt.

§ **88. Der Kreissector.** — Den Schwerpunkt eines Kreissectors OACB (Fig. 60) findet man, indem man sich denselben in sectorenförmige Elemente $O\alpha\beta$ zerschnitten denkt, welche auf den Elementen $\alpha\beta$ des Bogens ACB stehen. Diese sectorenförmigen Elemente können dann als Dreiecke betrachtet werden, deren Schwerpunkte die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Bögen mit dem Kreismittelpunkt im Verhältniss von 1:2 theilen; alle diese Schwerpunkte liegen auf dem Bogen A′C′B′, der zwischen denselben Endradien um denselben Mittelpunkt wie der ACB mit einem Radius gezogen wurde, der $\frac{2}{3}$ von dem des gegebenen Kreissectors ist. Dieser Bogen kann folglich als materielle Linie betrachtet werden, deren Elemente so schwer wie die zugehörigen, sectorenförmigen Elemente des Sectors sind, und deren Schwerpunkt mit dem des gegebenen Sectors zusammenfällt.

Fig. 60.

Derselbe wird also erhalten, indem man auf der Tangente, welche durch den Mittelpunkt C′ des Bogens A′C′B′ gezogen wurde, den halben Bogen C′B′, oder auch auf der durch den Halbirungspunkt C des Bogens ACB gezogenen Tangente den halben Bogen CB gleich CT ausstreckt und OT zieht. Wenn man dann durch den Endpunkt B′ des Bogens A′C′B′ eine Parallele zum mittleren Radius OC legt, welche jene Verbindungslinie in D trifft, so schneidet die durch letzteren Punkt zur Sehne AB gezogene Parallele den mittleren Radius in dem gesuchten Schwerpunkt S des Sectors.

§ **89. Der Kreisabschnitt** (Fig. 60). — Der Sector OACB, dessen Schwerpunkt S wir soeben finden lernten, kann als Summe des Abschnitts ACB und des Dreiecks ABO betrachtet werden. Der Schwerpunkt S_2 des letzteren liegt, wie leicht ersichtlich, im Durchschnitt des mittleren Radius OC mit der Sehne A′B′ des Bogens A′C′B′, der, wie im vorigen Paragraph gezeigt, bei Construction des Schwerpunkts des Sectors mit einem Radius gleich $\frac{2}{3}$ von dem des letzteren gezogen werden musste. Der Schwerpunkt S_1 des Abschnittes ACB muss offenbar auf dem mittleren Radius und zwar so liegen, dass der Schwerpunkt des Sectors die Verbindungslinie S_1S_2 im umgekehrten Verhältnisse der Inhalte des Abschnittes ACB und des Dreieckes ABO theilt, d. h. es muss sich verhalten

$$S_1S : SS_2 = \triangle ABO : \text{Abschn. } ACB.$$

Daraus folgt die andere Proportion:

$$S_1S : S_1S_2 = \triangle ABO : \text{Sect. } OACB$$
$$= MH : \text{arc. } CB.$$

Zieht man daher durch die bekannten Schwerpunkte S und S_2 zwei beliebige Parallele in gleichem Sinne und trägt auf die eine von S_2 aus das Stück $S_2E = \text{arc. } CB = CT$ auf und auf die andere das Stück $SF = MH$, so trifft die Verbindungslinie der Endpunkte E, F dieser Stücke den mittleren Radius in S_1, dem Schwerpunkt des Abschnitts.

§ **90. Ringstück des Ausschnittes zwischen zwei concentrischen Kreisen.** — In ähnlicher Weise wie eben den Schwerpunkt eines Kreisabschnittes kann man den des Ringstücks DACBEF (Fig. 61) des Ausschnittes zwischen zwei concentrischen Kreisen bestimmen. Dasselbe kann als Differenz der beiden Kreisausschnitte OACB und ODFE betrachtet werden. Deren Schwerpunkte S und S_2 werden auf die im § 88 gelehrte Weise mittelst der Kreisbogen A′B′ und D′E′ gefunden, die mit Radien gleich $\frac{2}{3}$ von denjenigen der betr. Ausschnitte gezogen werden. Der Schwerpunkt S_1 des Ringstückes muss dann auf dem mittleren Radius OC so liegen, dass sich verhält

$$S_1S : SS_2 = \text{Sect. ODFE} : \text{Ringst. DABE},$$

woraus die andern Proportionen folgen:

$$S_1S : S_1S_2 = \text{Sect. ODFE} : \text{Sect. OACB}$$
$$= r'^2 : r^2,$$

wenn r und r' die Radien der concentrischen Kreise sind, welche das Ringstück begrenzen. Damit letztere Proportion construirt werden kann, schreiben wir sie so

$$S_1S : S_1S_2 = x : r,$$

wo

$$x = \frac{r'^2}{r}$$

ist und folglich aus der Proportion

$$r : r' = r' : x$$

gefunden wird. Um letzteres auf graphischem Wege zu bewerkstelligen, darf man nur AF ziehen und durch D eine Parallele dazu, bis der mittlere Radius in G geschnitten wird. OG ist dann jenem x gleich, denn in der That verhält sich

$$OA : OD = OF : OG$$
$$r : r' = r' : x.$$

Fig. 61.

Zieht man nun durch die beiden bekannten Schwerpunkte S und S_2 nach derselben Seite hin zwei Parallellinien und trägt auf dieselben von jenen Punkten aus bzw. die Strecken $SJ = x = OG$ und $S_2H = r = OC$ auf, so schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte J und H derselben den mittleren Radius in dem gesuchten Schwerpunkt des Ringstücks.

§ 91. Das Parabel-Segment und das Parabel-Dreieck. — Der Schwerpunkt eines Parabel-Segmentes BAC (Fig. 62) mit beliebiger begrenzender Sehne BC wird gefunden, indem man sich dasselbe durch Schnitte, parallel zu jener Sehne, in Lamellen $\beta\gamma$ von durchweg gleicher, aber sehr geringer Breite getheilt denkt. Die Schwerpunkte aller dieser, als materielle Linie zu betrachtenden Lamellen liegen in ihren Mitten, also in dem zur Sehne BC conjugirten Durchmesser AX. Dieser ist folglich ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Parabelsegmentes.

Fig. 62.

Um die Lage desselben in jenem Durchmesser zu finden, bedienen wir uns des Momentensatzes. Wir denken uns in den Schwerpunkten jener Lamellen parallele Kräfte wirken, welche den Gewichten dieser Streifen, also ihren Längen 2y proportional sind. Die Momente dieser Kräfte beziehen wir auf die in A an die Parabel gelegte zur Sehne BC parallele Tangente MM als Momentenaxe und messen die Entfernungen x der Angriffspunkte von dieser in der Richtung des conjugirten Durchmessers AX. Bezeichnet dann x_0 die in derselben Richtung gemessene Entfernung des Angriffspunkts der Resultante, also des gesuchten Schwerpunktes von der Momentenaxe, so muss nach dem Momentensatze

$$x_0 \Sigma 2y = \Sigma 2xy$$

sein, woraus folgt

$$x_0 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y}.$$

Nun besteht zwischen den Grössen x und y bei der Parabel die bekannte Relation:

$$y = \sqrt{2px},$$

wo p eine constante Grösse ist. Setzt man diesen Werth für y in obige Gleichung ein, so kommt

$$x_0 = \frac{\Sigma\sqrt{x^3}}{\Sigma\sqrt{x}}.$$

Der Quotient auf der rechten Seite dieser Gleichung findet sich nach den Regeln der Analysis als $\frac{3}{5}l$, wo l die Länge AD des Durchmessers AX zwischen der Parabel und der Sehne BC bezeichnet. Wenn man also diese Strecke AD in dem Verhältniss von 2 : 3 so theilt, dass das grössere Stück zunächst der Parabel liegt, so ist der Theilungspunkt der Schwerpunkt des Parabelsegments.

Die Schwerpunkte S′ und S″ der Halbsegmente ADC und ADB haben, wie leicht aus Obigem hervorgeht, dieselbe Entfernung von der Momentenaxe MM, wie der Schwerpunkt S. Sie liegen also in der durch S zu BC gezogenen Parallelen, und zwar zu beiden Seiten des Durchmessers AX gleichweit von diesem entfernt. Wie gross diese Entfernung ist, finden wir wieder leicht mittelst des Momentensatzes, wenn wir nur jetzt AX als Momentenaxe nehmen und die Entfernungen in der Richtung von BC messen. Denken wir uns dann in den Mittelpunkten der Halblamellen $\delta\gamma$ parallele Kräfte wirken, deren Grösse der Länge y der Halblamellen proportinal oder gleich ist, und bezeichnen wir mit y_0 die in jener Richtung gemessene Entfernung des gesuchten Schwerpunktes von der Momentenaxe AX, so ergibt der Momentensatz die Relation

$$y_0 \, \Sigma y = \Sigma \tfrac{1}{2} y^2,$$

woraus

$$y_0 = \frac{1}{2}\frac{\Sigma y^2}{\Sigma y}.$$

Nach der bereits oben citirten Relation zwischen den Grössen y und x bei der Parabel geht diese Gleichung über in

$$y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2p}\,\frac{\Sigma x}{\Sigma\sqrt{x}}.$$

Der Quotient aus den beiden Summen auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nach den Regeln der Analysis gleich $\frac{3}{4}\sqrt{l}$; folglich wird

$$y_0 = \frac{3}{8}\sqrt{2pl}$$

oder, wenn mit h die halbe begrenzende Sehne BC bezeichnet wird,

$$y_0 = \frac{3}{8}h.$$

Die in den Endpunkten der Sehne BC an die Parabel gezogenen Tangenten schneiden sich in e i n e m Punkte E des zur Sehne conjugirten Durchmessers. Dieser Punkt liegt so, dass die Strecke zwischen ihm und dem Mittelpunkt D der Sehne vom Punkte A halbirt wird. Die Fläche des von jenen Tangenten und dem Parabelbogen gebildeten Ausschnittes BECA, P a r a b e l d r e i e c k genannt, ist halb so gross, als die des Parabelsegmentes BAC, mit welchem zusammen er das Dreieck BEC bildet. Der Schwerpunkt O des letzteren liegt, wie derjenige des Parabelsegmentes, in der Linie ED und zwar um $\frac{1}{3}$ ED oder $\frac{2}{3}l$ von D entfernt. Desshalb liegt auch der Schwerpunkt S_1 des Parabeldreiecks in der Linie ED, und denkt man sich die Sehne BC als Momentenaxe genommen und die Entfernungen in der Richtung des conjugirten Durchmessers gemessen, so muss nach dem Momentensatz die Relation stattfinden:

$$SD \times \text{Segm. } BAC + S_1D \times \text{Ausschn. } BECA = OD \times \triangle\, BEC$$

oder

$$\tfrac{2}{5}l \times 2 + S_1D \times 1 = \tfrac{2}{3}l \times 3,$$

woraus

$$S_1D = \tfrac{6}{5}l$$

und daher

$$S_1A = \tfrac{1}{5}l.$$

Die Schwerpunkte S'_1 und S''_1 der Halbausschnitte EAC und EAB liegen, wie leicht ersichtlich, in der zu BC durch S_1 gezogenen Parallelen, zu beiden Seiten des conjugirten Durchmessers gleichweit von diesem entfernt. Nimmt man EX als Momentenlinie und misst die Entfernungen in der Richtung der Sehne BC, so beträgt diejenige des Schwerpunktes des Dreiecks EDC, welches die Summe des Halbausschnitts EAC und des Halbsegments ADC ist, $\frac{1}{3}$ h. Folglich ist nach dem Momentensatz

$$S'S \times \text{Halbsegm. } ADC + S'_1 S_1 \times \text{Halbausschn. } EAC = \tfrac{1}{3} h \times \triangle\, EDC\ .$$

oder

$$\tfrac{3}{8} h \times 2 + S'_1 S_1 \times 1 = \tfrac{1}{3} h \times 3,$$

woraus

$$S'_1 S_1 = \tfrac{1}{4} h.$$

Die vorstehenden, auf die Parabel bezüglichen Resultate sind schon wegen ihrer Einfachheit von besonderem Interesse; sie sind aber auch von praktischer Wichtigkeit desshalb, weil sehr viele in den Anwendungen vorkommende krumme Linien und selbst noch Kreisbögen mit grosser Annäherung als Parabelbögen betrachtet und die von ihnen begrenzten Flächen mit Vortheil wie die obigen Parabelab- und Ausschnitte behandelt werden können.

§ 92. Unregelmässige ebene Figur; Schwerpunkt eines Schienenprofils als erstes Beispiel. — Der Schwerpunkt einer unregelmässigen ebenen Figur wird gefunden, indem man dieselbe durch Parallellinien in Lamellen zerlegt, die mit hinreichender Annäherung als Trapeze betrachtet werden dürfen. Die Breite dieser Lamellen wird in der Regel so klein werden müssen, dass man ohne merklichen Fehler ihren Schwerpunkt in der Mitte der Linie wird annehmen können, welche die Parallelseiten halbirt. Sollte dies nicht zulässig sein, weil jene Breite zu gross und die Neigung der nicht parallelen Seiten gegen einander zu stark ist, so kann man den Schwerpunkt des betr. Trapezes leicht nach § 85 finden. An diesen Schwerpunkten müssen nun parallele Kräfte wirkend gedacht werden, deren Grössen proportional oder gleich den Flächeninhalten der betr. Trapeze sind. Um die Grösse dieser Kräfte zu erhalten, verwandelt man die Trapeze mit Hülfe bekannter geometrischer Sätze in Rechtecke mit durchweg gleicher Basis. Die Höhen dieser Rechtecke sind dann ihren Flächeninhalten, also den Flächen der Trapeze proportional. Auf geeignetem Massstab gemessen, können sie sogar gleich diesen Flächen gesetzt werden, und man sagt dann, man habe die letzteren auf eine gemeinschaftliche Flächenbasis reducirt. Ist z. B. die Längeneinheit der Centimeter und wird als Flächenbasis auch ein Centimeter genommen, so repräsentirt je ein Centimeter des Längenmassstabes, wenn die reducirten Flächen mit ihm gemessen werden, einen Quadratcentimeter. Wird dagegen, unter sonst gleichen Verhältnissen, eine Länge von 4 Centimeter als Flächenbasis genommen, so repräsentirt jeder Centimeter der reducirten Flächen, mit dem gewöhnlichen Längenmassstab gemessen, eine Fläche von 4 Quadratcentimetern.

Nachdem man die so reducirten Flächen der Trapeze in deren Schwerpunkten als Parallelkräfte angebracht hat, muss man sie noch durch Kräfte- und Seilpolygon vereinigen. Wenn bereits ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt bekannt ist, wenn z. B. die Figur eine Symmetrieaxe hat, in der stets der Schwerpunkt liegen muss, so reicht ein Kräfte- mit zugehörigem Seilpolygon aus. Ausserdem müssen zwei solcher Polygonenpaare construirt werden.

Als Beispiel haben wir in Fig. 22 Taf. VII die Aufgabe durchgeführt, den Schwerpunkt eines Eisenbahnschienen-Profils, das ähnlich dem Normalprofil der königl. bayer. Staatseisenbahnen ist, zu finden. Dasselbe, in der Figur in natürlicher Grösse gezeichnet, hat eine Symmetrieaxe, in der folglich der Schwerpunkt liegen muss. Wir haben es durch Parallellinien senkrecht zu jener Symmetrieaxe in 19 Lamellen zerlegt, die mit Ausnahme des obersten Stückes, am Kopfe, sämmtlich als Trapeze betrachtet werden dürfen. Jenes oberste Stück haben wir als Parabelsegment behandelt. Die Schwerpunkte der Trapeze konnten wir alle in der Mitte der die Parallelseiten halbirenden Linie annehmen, nur bei der, von oben herab gezählten, 15ten Lamelle wurde wegen der starken Neigung

der nicht parallelen Seiten gegen einander der Schwerpunkt nach § 85 construirt. Der mit (1) bezeichnete Schwerpunkt der ersten Lamelle, des Parabelsegments, wurde so gefunden wie in § 91 angegeben. Die Schwerpunkte der Lamellen sind mit den von oben nach unten fortlaufenden Ziffern (1), (2), (3)... (19) bezeichnet. An ihnen sind die auf eine gemeinschaftliche Flächenbasis reducirten Flächeninhalte der Lamellen als Parallelkräfte anzubringen. Als Flächenbasis haben wir die Länge von 4 Centimeter gewählt und die Reduction, zunächst der Trapeze, auf sie in folgender Weise vorgenommen.

Es bezeichne h die längs der Symmetrieaxe zu messende Höhe des zu reducirenden Trapezes und m die Länge der Linie, welche mitten zwischen den Parallelseiten zu diesen parallel gezogen wird, die also bei allen Trapezen, ausgenommen das mit Nr. 15 bezeichnete, durch den Schwerpunkt geht. Dann ist m h der Inhalt des Trapezes und bezeichnet also a die Flächenbasis und x die reducirte Fläche, so muss

$$m\,h = a\,x$$

sein und kann daher x aus der Proportion

$$a : m = h : x$$

oder aus der

$$\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}h : x$$

gefunden werden. Diese Proportion ist leicht zu construiren. Man zieht durch den einen Endpunkt e (für Trapez Nr. 7 z. B.) der Linie, welche mitten zwischen den Parallelseiten parallel zu diesen gezogen ist, eine Parallele zur Symmetrieaxe. Auf derselben trägt man von ihrem Schnittpunkt f mit der oberen Parallelseite aus den vierten Theil der Basis, in unserer Figur also 1 Centimeter, ab und verbindet den Endpunkt g mit der Mitte i der oberen Parallelseite. Die Verbindungslinie schneidet jene mittlere Parallele in einem Punkt k, dessen Entfernung k (7) von der Mitte derselben gleich der gesuchten reducirten Fläche ist. Geben wir folglich den in den Schwerpunkten wirkenden Parallelkräften eine Richtung senkrecht zur Symmetrieaxe, so erhalten wir durch obige Construction die reducirten Flächen als jene Kräfte sogleich an ihre Stelle getragen, vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt des Trapezes in der Mitte der die Parallelseiten halbirenden Linie angenommen werden durfte. Andernfalls hat man, wie beim Trapez Nr. 15, die gefundene reducirte Fläche noch auf die durch den Schwerpunkt zu den Parallelseiten gezogene Parallele zu übertragen, was mit Hülfe einer einzigen Parallelen zur Symmetrieaxe leicht geschehen kann.

Die Reduction des Parabelsegments kann in ähnlicher Weise folgendermassen vorgenommen werden. Es bezeichne wieder h seine Höhe und s seine Sehne, so ist $\frac{2}{3}\,h\,s$ seine Fläche, und es muss daher die Gleichung

$$\frac{2}{3}\,h\,s = a\,x$$

oder die Proportion

$$a : s = \frac{2}{3}h : x,$$

welche identisch ist mit der

$$\frac{1}{4}a : \frac{1}{2}s = \frac{1}{3}h : x,$$

erfüllt werden, wenn x die gesuchte reducirte Fläche bedeutet. Um dieses x zu construiren, wird man durch den einen Endpunkt e′ der Sehne eine Parallele zur Symmetrieaxe ziehen und deren Schnittpunkt f′ mit der durch den Scheitel der Parabel zur Symmetrieaxe gezogenen Senkrechten suchen. Von diesem Punkte aus trägt man dann nach abwärts eine Länge f′g′ gleich dem vierten

Theil der Flächenbasis, in unserem Falle also 1^{cm}, auf ihr ab und verbindet den Endpunkt mit dem Scheitel der Parabel. Diese Verbindungslinie schneidet die zur Sehne gezogene Parallellinie, welche um $\frac{2}{5}$ der Höhe gegen den Parabelscheitel hin von ihr entfernt ist, in einem Punkte, dessen Entfernung von der Symmetrieaxe gleich der gesuchten reducirten Fläche ist. Dieselbe ist dann einfach auf die Kräftelinie zu übertragen, die durch den Schwerpunkt des Parabelsegments senkrecht zur Symmetrieaxe gezogen wird.

Aus den auf diese Weise erhaltenen Kräften haben wir das Kräftepolygon 0 1 2 3 ... 19 construirt, welches hier in eine Linie zusammenfällt. Die Strecke 0 19 desselben gibt die Summe aller Kräfte, oder den auf die Flächenbasis reducirten Inhalt des Schienenprofils. Wir finden in unserer Figur jene Strecke gleich $12{,}46^{cm}$, und da jeder Centimeter 4^{qcm} Fläche repräsentirt, so ist der Flächeninhalt des Profils gleich $49{,}8^{qcm}$.

Um das Seilpolygon zu construiren, nahmen wir im Kräftepolygon den Pol C an; aus ihm erhielten wir das mit 0 I II III ... XIX XX bezeichnete Seilpolygon. Durch den Durchschnittspunkt α der äussersten Seiten desselben muss die Resultante sämmtlicher Kräfte gehen. Zieht man folglich durch diesen Punkt eine Senkrechte zur Symmetrieaxe, so schneidet sie die letztere in dem gesuchten Schwerpunkt S des Schienenprofils.

§ 93. **Zweites Beispiel: Schwerpunkt eines Winkeleisenprofils.** — Als zweites Beispiel für die Aufsuchung des Schwerpunktes einer unregelmässigen ebenen Figur haben wir in Fig. 23 Taf. VIII ein Winkeleisenprofil gewählt, und zwar aus zwei Gründen: Erstens, um auch eine unsymmetrische Figur zu behandeln, und zweitens, um das Verfahren in dem Fall zu zeigen, wo die gegebene Figur in einige wenige geradlinig begrenzte Stücke getheilt werden kann. Das Profil ist wieder in natürlicher Grösse gezeichnet; wir haben es in sechs Stücke, vier Trapeze, ein Rechteck und ein Dreieck, zerlegt. Die Schwerpunkte dieser Stücke konnten also auf bekannte Weise gefunden werden. Sie sind mit (1), (2), (3) ... (6) bezeichnet worden. In diesen Schwerpunkten hat man sich wieder die auf eine gemeinschaftliche Basis reducirten Flächeninhalte der betr. Stücke als Parallelkräfte wirken zu denken.

Für die Reduction der Flächen haben wir hier, wo man es nicht bloss mit Trapezen zu thun hat, und wo die vorhandenen Trapeze nicht mehr die einfache Lage haben wie in Fig. 22 Taf. VII einen andern Weg als im vorigen Paragraphen eingeschlagen.

a) Um nämlich zunächst den Inhalt eines Dreieckes ABC (Fig. 63) auf die Basis a zu reduciren, durchschneide man von irgend einem Eckpunkt A desselben aus die gegenüberliegende Seite BC mit einem Radius gleich der doppelten Basis und verbinde jenen Eckpunkt mit dem erhaltenen Schnittpunkt. Die Antiprojection CE der durchschnittenen Dreieckseite auf diese Verbindungslinie ist die gesuchte Reduction. In der That sieht man leicht, dass $AD \times CE$ oder $2a \times CE$ gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC, folglich $a \times CE$ gleich diesem Inhalt ist, und daher CE dessen Reduction. Das Verfahren ist immer anwendbar; denn es kann ja jede Seite des Dreiecks in der unendlichen Geraden, in welcher sie liegt, beliebig verschoben werden, ohne dass der Inhalt des Dreiecks sich ändert. Dadurch kann man aber jeden der Endpunkte der verschobenen Seite der ihm gegenüberliegenden so nahe bringen, als man will (vgl. die Reduction der Momente in § 44 und die Fig. 32).

Fig. 63.

b) Um den Flächeninhalt eines beliebigen Viereckes ABCD (Fig. 64) auf eine gegebene Basis zu reduciren, verwandle man dasselbe zunächst in ein Dreieck ADE dadurch, dass man durch einen seiner Eckpunkte C eine Parallele CE zu der Diagonale DB zieht, die nicht durch diesen Eckpunkt geht, und den Schnittpunkt E dieser Parallelen mit einer der Seiten, AB, aufsucht, die in der

Gegenecke A von C zusammenstossen. Mit dem so erhaltenen Dreieck ADE verfährt man dann wie in a).

Fig. 64.

Auf diese Weise haben wir die Stücke des Winkeleisenprofils auf die Flächenbasis $a = 2^{cm}$ reducirt. Die dafür erhaltenen Strecken dachten wir uns zunächst als horizontal wirkende Kräfte in den betr. Schwerpunkten angebracht und construirten aus ihnen das Kräftepolygon 0 1 2 ... 6 (Fig. 23 Taf. VIII). Für den Pol C desselben ergab sich das Seilpolygon 0 I II ... VI VII, dessen äusserste Seiten sich in dem Punkte α schneiden. Die durch diesen Punkt gehende Horizontallinie ist folglich ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt des Profils.

Um einen zweiten geometrischen Ort zu finden, ist es nicht nothwendig, ein zweites Kräftepolygon zu zeichnen. Denkt man sich die Kräfte in den betr. Schwerpunkten vertical wirkend, so kann man sich vorstellen, dass das ihnen zugehörige Kräftepolygon dadurch aus dem schon gezeichneten erhalten wird, dass man dasselbe um seinen Pol C um einen Winkel von 90^0 dreht. Dadurch werden alle Strahlen des neuen Polygons senkrecht zu denen des alten, und somit hat man die Seiten des zweiten Seilpolygons nur senkrecht, anstatt parallel, zu den Strahlen des bereits gezeichneten Kräftepolygons zu ziehen. 0′ I′ II′. .VI′ VII′ ist dieses neue Seilpolygon und β' der Durchschnittspunkt seiner äussersten Seiten. Die durch diesen Punkt gezogene Verticallinie ist der zweite geometrische Ort für den gesuchten Schwerpunkt; derselbe liegt folglich im Durchschnitt S dieses neuen geometrischen Ortes mit dem bereits gefundenen.

Schwerpunkt von Oberflächen.

§ 94. Mantelfläche einer vollständigen und einer parallel abgestumpften Pyramide. — Der Schwerpunkt der Mantelfläche einer Pyramide liegt in der Verbindungslinie ihrer Spitze mit dem Schwerpunkt der Umfassungslinie der Grundfläche. Dies erkennt man leicht, wenn man sich die Pyramide durch Ebenen parallel zu ihrer Grundfläche in sehr dünne Platten zerlegt denkt, deren Umfänge als materielle Linien betrachtet werden können. Die Schwerpunkte dieser Umfassungslinien liegen sämmtlich in einer geraden Linie, welche daher geometrischer Ort für den Schwerpunkt der Mantelfläche der Pyramide ist. Diese Mantelfläche besteht aus Dreiecken, deren Grundlinien alle in der nämlichen Ebene, in der Grundfläche der Pyramide liegen; ihre Schwerpunkte liegen folglich auch sämmtlich in einer und derselben Ebene, in der nämlich, welche die Entfernung der Spitze von der Grundfläche in dem Verhältniss von 1 : 2 so theilt, dass der kleinere Theil zunächst der Grundfläche liegt. Der Durchschnittspunkt jener Ebene mit dem schon gefundenen geometrischen Ort ist der gesuchte Schwerpunkt. Derselbe theilt folglich die Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Umfassungslinie der Grundfläche im Verhältniss von 1 : 2 so, dass der kleinere Theil der Grundfläche anliegt.

Der Schwerpunkt der Mantelfläche einer parallel abgestumpften Pyramide liegt zunächst wieder in der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Umfassungslinien der beiden Grundflächen. Die Seitenflächen sind Trapeze, deren Schwerpunkte nach § 85 gefunden werden können. Bezeichnen a und b die beiden Parallelseiten eines solchen Trapezes, so theilt der Schwerpunkt desselben die Verbindungslinie der Mitten jener Parallelseiten in dem Verhältniss von $a + 2b : 2a + b$, wo das dem Gliede $a + 2b$ entsprechende Stück der Seite a, das andere der Seite b anliegt. Nun haben die Parallelseiten der sämmtlichen Trapeze, welche Mantelflächen der abgestumpften Pyramide sind,

das gleiche Verhältniss zu einander; somit ist auch das obige Verhältniss, in welchem der Schwerpunkt dieser Trapeze die Verbindungslinie der Mitten ihrer Parallelseiten theilt, für alle Trapeze das gleiche, diese Schwerpunkte liegen folglich alle in einer zu den Grundflächen parallelen Ebene, in der auch der Schwerpunkt der Mantelfläche der Pyramide liegt. Dieser ist folglich der Durchschnitt der eben genannten Ebene mit dem oben schon gefundenen geometrischen Ort. Er theilt die Verbindungsline der Schwerpunkte der Umfassungslinien der beiden Grundflächen in dem Verhältniss von

$$a + 2b : 2a + b,$$

wo a und b die Parallelseiten irgend einer trapezförmigen Seitenfläche bezeichnen, oder auch in dem Verhältniss von

$$u + 2u' : 2u + u',$$

wenn u und u′ die Umfänge der beiden Grundflächen der abgestumpften Pyramide bedeuten. Dabei muss immer das kleinere Stück der Theilung der grösseren Grundfläche zunächst liegen.

§ 95. Mantelfläche eines vollständigen und eines parallel abgestumpften Kegels. — Dieselben Resultate, welche wir soeben für den Schwerpunkt der Mantelfläche einer ganzen und einer parallel abgestumpften Pyramide erhalten haben, gelten für den Schwerpunkt eines ganzen und eines parallel abgestumpften Kegels, der ja als Pyramide mit unendlich grosser Seitenflächenzahl betrachtet werden kann. Für den abgestumpften Kegel hat man sich nur desjenigen Satzes des vorigen § zu bedienen, in welchem die Umfänge u und u′ der Grundflächen vorkommen. In dem speciellen Fall, wo diese Grundflächen Kreise werden, deren Umfänge ihren Radien proportional sind, lautet also jener Satz so: Der Schwerpunkt der Mantelfläche eines parallel abgestumpften Kegels mit kreisförmigen Grundflächen theilt die Verbindungslinie der Mittelpunkte derselben in dem Verhältniss von

$$r + 2r' : 2r + r'$$

oder

$$d + 2d' : 2d + d',$$

wo r und r′, bezw. d und d′ die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen bezeichnen. Das kleinere Stück der Theilung ist natürlich wieder an der grösseren Grundfläche zu nehmen. Jene Theilung selbst kann offenbar ganz so vorgenommen werden, wie es beim Trapez für die Linie gezeigt worden ist, welche die Mitten der Parallelseiten verbindet (§ 85).

§ 96. Mantelfläche eines Prismas und eines Cylinders mit parallelen Grundflächen. — Wenn ein Prisma mit parallelen Grundflächen in ähnlicher Weise, wie in § 94 die Pyramide, durch Ebenen parallel zu seinen Grundflächen in Platten von gleicher, aber sehr geringer Dicke zerlegt wird, so gelangt man leicht zu dem Resultat, dass der Schwerpunkt seiner Mantelfläche in der Mitte der Linie liegt, welche die Schwerpunkte der Umfassungslinien seiner Grundflächen verbindet. Dasselbe Resultat gilt natürlich für jeden Cylinder mit parallelen Grundflächen.

§ 97. Die Kugelhaube und die krumme Oberfläche einer Kugelzone. — Denkt man sich die Höhe eines Kugelabschnittes in eine sehr grosse Anzahl gleicher Theile getheilt und durch die Theilungspunkte Ebenen parallel zur Grundfläche des Abschnitts gelegt, so wird hierdurch die Oberfläche des letzteren in Zonen (zu äusserst in einen Abschnitt) zerlegt, deren Oberflächen durchweg gleiche Grösse haben. Es folgt daraus unmittelbar, dass der Schwerpunkt der Oberfläche des Abschnittes oder der Kugelhaube in der Mitte ihrer Höhe liegt. Aus denselben Gründen muss der Schwerpunkt der Oberfläche einer Kugelzone in der Mitte der Linie liegen, welche die Mittelpunkte der sie begrenzenden Parallelkreise verbindet.

Schwerpunkt von Körpern.

§ 98. **Prisma und Cylinder mit parallelen Grundflächen.** — Der Schwerpunkt eines Prismas oder eines Cylinders mit parallelen Grundflächen liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser Grundflächen. Das ist leicht zu beweisen, indem man diese Körper durch Ebenen parallel zu ihren Grundflächen in eine sehr grosse Anzahl gleichdicker Platten zerlegt, deren Dicke jedoch so gering ist, dass sie als materielle ebene Flächen betrachtet werden können.

§ 99. **Das Tetraëder.** — Um den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraëders zu finden, theile man dasselbe wieder durch Ebenen parallel zu einer Seitenfläche in sehr dünne, als materielle Dreiecksflächen zu betrachtende Platten. Die Schwerpunkte dieser Platten liegen sämmtlich in der Linie, welche den Schwerpunkt dieser Seitenfläche mit der ihr gegenüberliegenden Spitze verbindet. In dieser Linie muss folglich auch der Schwerpunkt des Tetraëders liegen. In ähnlicher Weise erhält man noch drei geometrische Oerter für den Schwerpunkt, indem man die Verbindungslinie jeder der drei übrigen Ecken des Tetraëders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche zieht. Die vier geometrischen Oerter schneiden sich, wie sich auch geometrisch leicht zeigen lässt, in einem und demselben Punkt, dem Schwerpunkt des Tetraëders. Derselbe theilt jede der Linien, welche eine Spitze mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Grundfläche verbindet, in dem Verhältniss von 1 : 3 so, dass das kleinere Stück der Grundfläche zunächst liegt.

Es ist leicht, noch andere geometrische Oerter für den Schwerpunkt eines Tetraëders $ABCD$ (Fig. 65) aufzufinden. Denkt man sich dasselbe durch Ebenen parallel zu einem Paar gegenüberliegender Seiten in Platten von sehr geringer, aber durchweg gleicher Dicke zerschnitten, so erhalten diese Platten die Gestalt von Parallelogrammen $EFGH$, $E_1F_1G_1H_1$, welche am Anfang und Ende in gerade Linien, nämlich in jene sich gegenüberliegende Seiten CD und AB des Tetraëders übergehen. Man sieht leicht, dass die Schwerpunkte aller dieser Parallelogramme in der Verbindungslinie der Mittelpunkte J und K jener Seitenkanten AB und CD des Tetraëders liegen, welche Linie demnach auch den Schwerpunkt des letzteren enthalten muss. Noch mehr: die zusammenstossenden Seiten jener Parallelogramme bilden durchweg gleiche Winkel mit einander; ihre Flächeninhalte verhalten sich demnach wie die Producte $GH \times GF$, $G_1H_1 \times G_1F_1$ jener Seiten. Weil aber

Fig. 65.

$$GH : G_1H_1 = CG : CG_1$$

und

$$GF : G_1F_1 = BG : BG_1$$

so folgt $$GH \times GF : G_1H_1 \times G_1F_1 = CG \times BG : CG_1 \times BG_1 = \overline{GL}^2 : \overline{G_1L_1}^2,$$

wenn GL und G_1L_1 die in den Eckpunkten G und G_1 senkrecht auf CB errichteten Ordinaten des Halbkreises bedeuten, der über der Kante CB als über einem Durchmesser beschrieben wurde. Die Quadrate über den Ordinaten dieses Halbkreises sind folglich den Flächeninhalten der Parallelogramme, deren auf dem Durchmesser CB gelegene Ecken mit den Fusspunkten der Ordinaten zusammenfallen, proportional. Wie sich nun aber immer je zwei gleichlange Ordinaten des Halbkreises finden, deren Fusspunkte vom Mittelpunkte des Halbkreises zu beiden Seiten desselben gleichweit entfernt sind, so finden sich unter obigen Parallelogrammen immer je zwei von gleichem Flächeninhalt, deren Schwerpunkte vom Mittelpunkte der Linie JK zu beiden Seiten desselben gleichweit abstehen.

Da endlich der gemeinschaftliche Schwerpunkt eines solchen Paares von Parallelogrammen mitten zwischen ihren Schwerpunkten liegt, so folgt hieraus, dass der Schwerpunkt S des Tetraëders der Halbirungspunkt der Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberstehender Kanten desselben ist.

Betrachtet man ABD als Grundfläche, C als Spitze der dreiseitigen Pyramide ABCD, so beträgt die in irgend welcher Richtung gemessene Entfernung des Mittelpunktes K der Seitenkante DC von der Grundfläche die Hälfte der in derselben Richtung gemessenen Entfernung der Spitze C von letzterer Fläche. Der Mittelpunkt S der Linie JK ist aber wieder halb so weit von derselben entfernt als jener Punkt K, und folglich ist die in irgend einer Richtung gemessene Entfernung des Schwerpunktes eines Tetraëders von einer Seitenfläche desselben viermal so klein als die Entfernung der Spitze, welche dieser Seitenfläche gegenüberliegt, von letzterer. Dies stimmt vollkommen mit dem überein, was wir schon oben auf anderem Wege gefunden haben.

Denkt man sich das Gewicht Q des Tetraëders ABCD in seinem Schwerpunkt S als vertical abwärts gerichtete Kraft wirken, so kann man dieselbe zunächst in zwei gleiche, parallele und gleichgerichtete Componenten zerlegen, die in J und K angreifen und die Grösse $\frac{1}{2}Q$ haben. Jede dieser Componenten kann dann wieder in ganz derselben Weise in zwei an A und B, bezw. C und D angreifende Seitenkräfte zerlegt werden, deren Grösse je $\frac{1}{4}Q$ ist. Nimmt man nun irgend eine Ebene als Momentenebene und nennt a, b, c, d die in irgend einer Richtung gemessenen Entfernungen der Eckpunkte A, B, C, D von derselben, s aber die in gleicher Richtung gemessene Entfernung des Schwerpunktes S des Tetraëders, so ist nach dem Momentensatz

$$Qs = \frac{1}{4}Qa + \frac{1}{4}Qb + \frac{1}{4}Qc + \frac{1}{4}Qd$$

oder

$$s = \frac{1}{4}\left(a + b + c + d\right),$$

also die Entfernung des Schwerpunktes gleich dem arithmetischen Mittel der Entfernungen der Ecken des Tetraëders (vgl. den Satz in § 83 für das Dreieck).

§ 100. **Pyramide und Kegel.** — Der Schwerpunkt einer mehr als dreiseitigen Pyramide liegt ebenfalls in der Verbindungslinie ihrer Spitze mit dem Schwerpunkt ihrer Grundfläche. Denkt man sich eine solche Pyramide dadurch in dreiseitige zerlegt, dass man durch ihre Spitze und durch die von einem und demselben Eckpunkte aus gezogenen Diagonalen ihrer Grundfläche Ebenen legt, so liegen die Schwerpunkte aller jener dreiseitigen Pyramiden in einer zur Grundfläche parallelen Ebene, in der nämlich, welche die Entfernung der Spitze von der Grundfläche im Verhältniss von 1 : 3 theilt, den kleineren Theil an der Grundfläche genommen. In dieser Ebene liegt folglich auch der Schwerpunkt der vielseitigen Pyramide. Derselbe theilt also die Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche ebenfalls in dem Verhältniss von 1 : 3 so, dass der kleinere Theil zunächst der Grundfläche liegt.

Dasselbe Resultat gilt selbstverständlich für jeden Kegel.

§ 101. **Die parallel abgestumpfte Pyramide und der parallel abgestumpfte Kegel.** — Um den Schwerpunkt einer parallel abgestumpften Pyramide $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Fig. 66) zu erhalten, ergänzt man dieselbe zu einer vollständigen ABCDO. Dann liegen der Schwerpunkt S der letzteren und der S_1 der Ergänzung in der Linie Os, welche die Spitze O mit dem Schwerpunkt s der unteren Grundfläche verbindet, in welcher Linie auch der Schwerpunkt s_1 der oberen Grundfläche liegt. Der Schwerpunkt S der ganzen Pyramide ist dabei um $\frac{1}{4}$ der Verbindungslinie Os vom Schwerpunkt der unteren Grundfläche und derjenige S_1 der Ergänzung ist um $\frac{1}{4}$ der Verbindungslinie Os_1 vom Schwerpunkt der oberen Grundfläche entfernt.

Nehmen wir den Schwerpunkt S_2 des Stumpfes, der gleichfalls in der Linie Os_1s liegen muss, als gefunden an, und denken wir uns in ihm und im Schwerpunkt S_1 der Ergänzung parallele und gleichgerichtete Kräfte wirken, die bezw. gleich den Gewichten Q_2 und Q_1 des Stumpfes und der Ergänzung sind, so muss die Resultante derselben im Schwerpunkt S der ganzen Pyramide angreifen. Es muss folglich die Proportion stattfinden

Fig. 66.

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q_2$$

oder, wenn Q das Gewicht der vollständigen Pyramide bezeichnet,

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q - Q_1,$$

woraus folgt

$$\overline{S_2S_1} : \overline{S_2S} = Q : Q_1.$$

Trägt man folglich an die bekannten Punkte S und S_1 zwei nach beliebigen Richtungen und in gleichem Sinne gezogene Parallellinien S_1T und ST_1 an, deren Längen bezw. den Gewichten der ganzen und der Ergänzungspyramide proportional sind, so schneidet die Verbindungslinie TT_1 ihrer Endpunkte die Linie Os in dem gesuchten Schwerpunkt S_2 des Stumpfes.

Es ist aber leicht, zwei solche Linien S_1T, ST_1 zu finden, die sich wie die Gewichte, folglich wie die Cubikinhalte und daher wie die dritten Potenzen zweier homologen Kanten OA und OA_1 jener beiden Pyramiden verhalten, die einander ähnlich sind. Man darf nur durch den Punkt O eine beliebige Linie neben die OA legen, auf dieselbe die Strecken OA und OA_1 von O aus als OA' und OA'_1 nochmals auftragen und die Antiparallelen $A'A_1$ und A'_1A ziehen. Dann nimmt man eine der gesuchten Linien, etwa ST_1, beliebig an und trägt sie von O aus auf den einen Schenkel des Winkels AOA' als OU auf. Zieht man dann durch den Endpunkt U eine Parallele zu einer jener Antiparallelen A_1A', bis der andere Winkelschenkel in V geschnitten wird, ferner durch diesen Schnittpunkt eine Parallele zur zweiten Antiparallelen A'_1A, bis wieder der erste Winkelschenkel in W geschnitten wird, und endlich durch den neuen Schnittpunkt eine Parallele zur ersten Antiparallelen A_1A', bis der zweite Winkelschenkel in X getroffen ist, so wird OX die zweite gesuchte Linie; nämlich es verhält sich, wie leicht zu sehen,

$$OU : OV = OA_1 : OA$$
$$OV : OW = OA_1 : OA$$
$$OW : OX = OA_1 : OA$$

und folglich

$$OU : OX = \overline{OA_1}^3 : \overline{OA}^3.$$

Man hat also ST_1 gleich OU und S_1T gleich OX zu machen, um in dem Schnittpunkt der Verbindungslinie TT_1 mit der Linie Os den Schwerpunkt S_2 der abgestumpften Pyramide zu erhalten.

Durch eine ganz ähnliche Construction findet man den Schwerpunkt eines parallel abgestumpften Kegels. Statt der Seitenkante OA hat man nur eine beliebige Mantellinie des vollständigen Kegels zu nehmen.

§ **102. Polyeder.** Jeden Körper, der von ebenen Flächen begrenzt ist, kann man in Pyramiden und selbst in Tetraëder zerlegen, deren Schwerpunkte nach §§ 99 und 100 gefunden werden können. Denkt man sich in diesen Schwerpunkten parallele Kräfte gleich den Gewichten jener Pyramiden oder Tetraëder, also proportional den Cubikinhalten derselben wirken, so ist deren Mittelpunkt der Schwerpunkt des Körpers. Er kann also auf die in § 71 angegebene Weise construirt werden.

§ **103. Der Kugelsector.** — Der Schwerpunkt eines Kugelsectors, den wir uns durch Umdrehung des Kreissectors OACB (Fig. 67) um seinen mittleren Radius OC entstanden denken wollen, liegt offenbar in diesem mittleren Radius. Denkt man sich die Kugelhaube ABC in Elemente von gleicher Grösse zerlegt, und nimmt man dieselben als Grundflächen von Pyramiden oder Kegeln, deren Spitzen im Mittelpunkte O der Kugel liegen, dann befinden sich die Schwerpunkte derselben sämmtlich auf der Kugelhaube A′C′B′, deren Radius $\frac{3}{4}$ von demjenigen des gegebenen Sectors ist. Diese Kugelhaube kann im Sinne des § 78 als gleichmässig belastete Fläche betrachtet werden, deren Schwerpunkt S, in der Mitte ihrer Höhe C′D′ gelegen, mit dem des Kugelsectors zusammenfällt.

Fig. 67.

§ **104. Die concentrische Kugelschale.** — Der Schwerpunkt einer concentrischen Kugelschale, die wir uns durch Umdrehung des Ringstückes $A_1ACBB_1C_1$ (Fig. 68) um seinen mittleren Radius OC entstanden denken, liegt natürlich wieder auf diesem letzteren. Denken wir uns die Schale als Differenz der Sectoren OACB und $OA_1C_1B_1$, deren Schwerpunkte S und S_1 nach vorigem § gefunden werden können, und nehmen wir den Schwerpunkt S_2 der Schale als bereits gefunden an, so müssen zwei in S_2 und S_1 angreifende, parallele und gleichgerichtete Kräfte, die bezw. gleich den Gewichten Q_2 und Q_1 der Schale und des Sectors $OA_1C_1B_1$ sind, eine Resultante haben, die in S angreift. Daher muss die Proportion stattfinden

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q_2$$

oder, mit Q das Gewicht des Kugelsectors OACB bezeichnet,

$$\overline{S_2S} : \overline{SS_1} = Q_1 : Q - Q_1,$$

woraus

$$\overline{S_2S} : \overline{S_2S_1} = Q_1 : Q.$$

Fig. 68.

Wenn man folglich von den bekannten Punkten S_1 und S aus nach beliebiger Richtung hin und in gleichem Sinne zwei Parallele S_1T und ST_1 zieht, deren Längen sich verhalten wie die Gewichte der beiden Kugelsectoren, so schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte T und T_1 derselben den mittleren Radius in dem gesuchten Schwerpunkt S_2 der Kugelschale.

Nun verhalten sich die Gewichte Q und Q_1 der beiden Kugelsectoren wie ihre Cubikinhalte, also wie die dritten Potenzen ihrer Radien OA und OA_1. Da OA gleich OC und OA_1 gleich OC_1, so sind AC_1 und A_1C antiparallel. Man darf folglich nur OU beliebig annehmen, UV parallel zu A_1C, dann VW parallel zu AC_1, endlich WX wieder parallel zu A_1C ziehen, um in OU und OX zwei Linien zu erhalten, die das verlangte Verhältniss $Q_1 : Q$ zu einander haben. Macht man folglich ST_1 gleich OU und S_1T gleich OX, so gibt der Schnitt der Linie TT_1 mit OC den gesuchten Schwerpunkt S_2.

§ **105. Der Kugelabschnitt.** — Der Schwerpunkt S_2 eines Kugelabschnittes, den wir uns durch Umdrehung des Kreisabschnittes ACB (Fig. 69) um seinen mittleren Radius OC entstanden denken können, liegt auf diesem mittleren Radius. Auf derselben Linie liegen die nach §§ 103 und 100

zu findenden Schwerpunkte S und S_1 des Kugelausschnitts OACB und des Kegels OAB, als deren Differenz der Kugelabschnitt betrachtet werden kann. Man kann folglich auf einem ganz ähnlichen Wege wie im vorigen § zur Kenntniss des Schwerpunktes des letzteren gelangen. Wenn man von den bekannten Schwerpunkten S und S_1 aus Parallele ST_1 und S_1T nach beliebiger Richtung hin und in dem nämlichen Sinne zieht und deren Längen proportional den Gewichten oder Cubikinhalten bezw. des Kegels OAB und des Ausschnittes OACB macht, so schneidet die Verbindungslinie ihrer Endpunkte T, T_1 den mittleren Radius im gesuchten Schwerpunkt. Nun verhalten sich die Inhalte jener Körper wie

Fig. 69.

$$\frac{1}{3}\pi h(2r-h)(r-h) : \frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

oder wie

$$(2r-h)(r-h) : 2r^2,$$

oder wie

$$x : r,$$

wenn

$$x = \frac{(2r-h)(r-h)}{2r}$$

gesetzt und mit r der Kugelradius, mit h die Höhe DC des Abschnittes bezeichnet wird.

S_1T ist folglich gleich dem Kugelradius zu machen, und die Länge x der anderen Parallelen ST_1 findet sich aus der Proportion

Fig. 70

$$2r : (2r-h) = (r-h) : x.$$

Verlängert man folglich den Radius OC rückwärts um sich selbst bis E, und trägt man auf die an C gezogene Tangente vom Berührungspunkt C aus die Länge CF $=$ OD $= r - h$ ab, so schneidet die Verbindungslinie EF die Sehne AB in einem Punkte G, dessen Abstand DG von der Sehnenmitte die gesuchte Linie x ist. Man braucht folglich nur noch ST_1 gleich DG zu machen und die Verbindungslinie TT_1 zu ziehen, um in deren Schnittpunkt mit dem mittleren Radius OC den gesuchten Schwerpunkt S_2 des Kugelabschnittes zu erhalten.

§ **106. Die körperliche Kugelzone.** — Um den Schwerpunkt einer körperlichen Kugelzone zu finden, schlagen wir im Folgenden einen Weg ein, der auch bei anderen derartigen Aufgaben mit Vortheil verfolgt werden kann. Die Zone AA_1B_1B (Fig. 70), welche wir uns durch Umdrehung des zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Kreisstücks AA_1B_1B um den mittleren Radius OM

entstanden denken, kann aus den beiden Kugelsectoren OAMB und OA_1MB_1 und aus den beiden Kegeln ABO und A_1B_1O so erhalten werden, wie die folgende Relation zeigt:

$$\text{Zone } AA_1B_1B = \text{Sect. } OAMB - \text{Sect. } OA_1MB_1 + \text{Keg. } A_1B_1O - \text{Keg. } ABO.$$

Stellt man sich also vor, dass an den Schwerpunkten dieser Bestandtheile parallele Kräfte wirken gleich deren Gewichten und in dem einen oder andern Sinne gerichtet, je nachdem das Vorzeichen des betr. Stückes in obiger Relation + oder — ist, so geht die Resultante dieser Kräfte durch den gesuchten Schwerpunkt der Kugelzone. Wenn man jene Kräfte durch ein Kräfte- und Seilpolygon verbindet und durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seiten des letzteren eine Parallele zu den Kräften zieht, so schneidet diese den mittleren Radius OM, welcher offenbar auch ein geometrischer Ort für den gesuchten Schwerpunkt ist, in diesem.

Die Schwerpunkte der Stücke, aus denen wir uns die Kugelzone erhalten denken, können nach den §§ 100 und 103 gefunden werden. Sie sind der Ordnung nach, in welcher die Stücke in obiger Relation vorkommen: S_1, S_2, S_3, S_4. In der nämlichen Ordnung genommen, verhalten sich die Gewichte oder Cubikinhalte jener Stücke wie

$$\frac{2}{3}r^2\pi h : \frac{2}{3}r^2\pi h_1 : \frac{1}{3}s_1^2\pi(r-h_1) : \frac{1}{3}s^2\pi(r-h),$$

oder wie

$$2h : 2h_1 : (r-h_1)\frac{s_1^2}{r^2} : (r-h)\frac{s^2}{r^2},$$

wo r den Kugelradius, h und h_1 die Höhen MD und MD_1 und s und s_1 die Halbsehnen AD und A_1D_1 bezeichnen. Die zwei letzten Glieder des obigen Verhältnisses sind leicht zu construiren: Wenn man auf die Winkelschenkel OA und OM die Halbsehnen s_1 gleich $OR_1 = OR'_1$ und bezw. $s = OR = OR'$ abträgt und die Antiparallelen AR und MR′ bezw. AR_1 und MR'_1 zieht, so erhält man $(r-h_1)\frac{s_1^2}{r^2}$, wenn man D_1W_1 parallel zu MR'_1 und W_1X_1 parallel zu AR_1 zieht. Denn es ist

$$\overline{OX_1} : \overline{OW_1} = s_1 : r$$

und

$$\overline{OW_1} : \overline{OD_1} = s_1 : r$$

folglich

$$OX_1 = (r-h_1)\frac{s_1^2}{r^2}.$$

In ähnlicher Weise erhält man für $(r-h)\frac{s^2}{r^2}$ die Strecke OX, wenn man DW parallel zu MR′ und WX parallel zu AR zieht.

Die Strecken $2h = 2\overline{MD}$, $2h_1 = 2\overline{MD_1}$, dann OX_1 und OX können also als die Kräfte angesehen werden, welche der Ordnung nach in den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3, S_4 wirkend gedacht werden müssen. Wir zeichnen diese Kräfte in der Richtung der Sehnen AB, A_1B_1, und zwar die erste und dritte in dem Sinne von links nach rechts, die anderen beiden im entgegengesetzten Sinne. Es entspricht ihnen dann das Kräftepolygon 0 1 2 3 4, in welchem der Pol C willkürlich anzunehmen ist. Aus demselben ergibt sich das Seilpolygon 0 I II III IV V, dessen äusserste Seiten sich im Punkte α schneiden. Die durch diesen Punkt gezogene Parallele zu den Kräften schneidet den mittleren Radius OM im gesuchten Schwerpunkt S der körperlichen Kugelzone.

§ 107. Abschnitt eines Paraboloids. — Lässt man längs eines Durchmessers AX einer Parabel BAC (Fig. 62, S. 101) eine Ellipse mit ihrem Mittelpunkt so fortrücken, dass irgend ein Paar conjugirter Durchmesser derselben sich selbst parallel bleiben und die Enden des einen dieser Durchmesser stets auf der Parabel BAC liegen, während der andere zu diesem immer dasselbe Verhältniss behält, so entsteht ein Paraboloid. Den Schwerpunkt eines Abschnittes BAC desselben finden wir in ganz ähnlicher Weise wie im § 91 denjenigen des Parabelsegmentes. Er liegt offenbar

auf dem Durchmesser AD. Zerschneiden wir den Abschnitt durch eine Reihe von Ebenen, die zu BC parallel sind, in sehr dünne Platten $\beta\gamma$, welche als materielle ebene Figuren betrachtet werden können, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Figuren, Ellipsen, im Durchmesser AD. In diesen Schwerpunkten denken wir uns parallele Kräfte wirken, welche den Gewichten jener Platten, also den Flächeninhalten jener Ellipsen und daher, weil letztere einander ähnlich sind, den Quadraten der Halbmesser oder Ordinaten $\delta\gamma = y$ proportional sind. Wir wenden auf diese Kräfte den Momentensatz an, indem wir eine durch A parallel zu jenen Schnittebenen gelegte Ebene MM als Momentenebene annehmen und die Entfernungen x der Angriffspunkte jener Kräfte, sowie diejenige x_0 des Angriffspunktes ihrer Resultante in der Richtung AX messen. Der Momentensatz ergibt dann die Relation

$$x_0 \Sigma y^2 = \Sigma x y^2,$$

woraus

$$x_0 = \frac{\Sigma x y^2}{\Sigma y^2}.$$

Es besteht nun wieder zwischen den Ordinaten y und den Abscissen x der Parabel BAC die Gleichung

$$y^2 = 2px,$$

wo p eine constante Grösse ist. In Folge davon geht obige Relation in die über

$$x_0 = \frac{\Sigma 2 p x^2}{\Sigma 2 p x} = \frac{\Sigma x^2}{\Sigma x},$$

in welcher der Quotient auf der rechten Seite mit Hülfe der höheren Analysis als $\frac{2}{3}l$ gefunden wird, mit l die Länge AD des Durchmessers zwischen der Parabel und der Grenzsehne BC bezeichnet. Der Schwerpunkt eines Paraboloid-Abschnitts liegt folglich in dem Durchmesser des Paraboloids, der durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht, und theilt die Strecke desselben zwischen der Grundfläche und der Paraboloid-Oberfläche im Verhältniss von 1 : 2 so, dass der kleinere Theil an der Grundfläche liegt.

Der Cubikinhalt eines solchen Paraboloid-Abschnittes ist bekanntlich gleich dem halben Produkt aus der elliptischen Grundfläche in die senkrecht gemessene Entfernung des Endpunktes A desjenigen Durchmessers von ihr, welcher durch ihren Mittelpunkt geht.

§ 108. Schwerpunkt eines unregelmässig begrenzten Körpers. — Den Schwerpunkt eines unregelmässigen, von krummen Flächen begrenzten Körpers findet man am besten dadurch, dass man den Körper durch parallele Ebenen in eine grosse Anzahl dünner Platten von durchweg gleicher Dicke zerschneidet. Die Dicke dieser Platten soll so klein genommen werden, dass man ihre Schwerpunkte mit denjenigen der Schnittfiguren zusammenfallend annehmen darf, welche Ebenen ergeben, die mitten zwischen den die Platten begrenzenden Schnittebenen parallel zu diesen gezogen werden, und dass die Cubikinhalte der Platten proportional den Flächeninhalten jener mittleren Schnittfiguren gesetzt werden dürfen. Denkt man sich dann in den Schwerpunkten der Platten Parallelkräfte wirken, welche ihren Inhalten proportional sind, so ist der Mittelpunkt dieser Kräfte, der nach § 71 gefunden werden kann, der gesuchte Schwerpunkt des Körpers.

Bei der wie oben vorgenommenen Zerlegung eines Körpers durch Parallelschnitte erhält man in der Regel an den Enden haubenförmige Stücke oder Reste. Diese Hauben kann man meistens als Paraboloid-Abschnitte betrachten und demnach so behandeln, wie es im vorigen § gezeigt wurde.

IX. Abschnitt.

Höhere Momente und Trägheitsmoment paralleler Kräfte. — Trägheitsfläche und Centralfläche.

§ 109. Definition des statischen Momentes und der Momente höherer Ordnung. — Wir haben früher, im § 73, das Product aus einer Kraft P_1 in die senkrecht oder schief gemessene Entfernung x_1 ihres Angriffspunktes von einer Ebene E_x das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf die Ebene genannt, und unter dem gesammten statischen Moment eines Systems paralleler Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ in Bezug auf eine Ebene E_x die Summe der Producte aus ihnen in die Entfernungen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ ihrer Angriffspunkte von jener Ebene, also den Ausdruck

$$\Sigma P x$$

verstanden. Denken wir uns nun wieder ein System paralleler Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ und Ebenen $E_x, E_y, E_z \ldots$, und bezeichnen wir die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte jener Kräfte von der Ebene E_x mit $x_1, x_2, x_3 \ldots$, ferner die wieder in irgend welcher Richtung gemessenen Entfernungen derselben Punkte von der Ebene E_y mit $y_1, y_2, y_3 \ldots$ und ähnlich für die anderen Ebenen; dann nennen wir das Product

$$P_1 x_1^m y_1^n z_1^k \ldots,$$

wo m, n, k... beliebige ganze positive Zahlen bezeichnen, ein höheres Moment der Kraft P_1 in Bezug auf jene Ebenen und die Produktensumme

$$P_1 x_1^m y_1^n z_1^k \ldots + P_2 x_2^m y_2^n z_2^k \ldots + P_3 x_3^m y_3^n z_3^k \ldots + \ldots = \Sigma P x^m y^n z^k \ldots$$

ein höheres Moment des Systems paralleler Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$, und zwar von der $m + n + k \ldots^{\text{ten}}$ Ordnung.

§ 110. Construction der höheren Momente im Allgemeinen. — Nachdem wir im § 75 das statische Moment eines Systems paralleler Kräfte auf graphischem Wege finden gelernt haben, ist es leicht zu zeigen, wie jedes höhere Moment

$$\Sigma P x^m y^n z^k \ldots$$

eines solchen Kräftesystems durch Construction zu erhalten ist. Beschäftigen wir uns zunächst mit der Ebene E_x allein, so wird das statische Moment $\Sigma P x$ des Kräftesystems erhalten, wenn man eine beliebige Projectionsebene E_x' annimmt und die Kräfte P parallel zur Durchschnittslinie M_x derselben mit der Momentenebene E_x stellt. Projicirt man dann diese Kräfte in einer zur E_x parallelen, sonst aber beliebigen Richtung auf die Projectionsebene E_x' und verbindet die parallelen Projectionen in letzterer Ebene durch ein Kräfte- und Seilpolygon, so schneiden die auf einander folgenden Seiten des letzteren auf der Linie M_x Stücke ab, welche gleich den reducirten statischen Momenten Px der Kräfte P der Grösse und dem Vorzeichen nach sind, und welche, an einander gereiht, wie sie es in der Linie M_x bereits sind, das statische Moment $\Sigma P x$ des Kräftesystems geben. Das letztere ist

einfach gleich dem Abschnitt, den die äussersten Seilpolygonseiten auf der Linie M_x machen, und bezieht sich, sowie auch jene Einzelmomente, auf eine Basis H_x', die wir im § 75 näher bestimmt haben. Bezeichnen wir folglich jene Abschnitte der auf einander folgenden Seilpolygonseiten auf der Linie M_x, oder die statischen Momente $P_1 x_1$, $P_2 x_2 \ldots$ der Kräfte P mit $\mathfrak{X}_1'$, $\mathfrak{X}_2' \ldots$, so ist das statische Moment des Kräftesystems

$$\Sigma P x = H_x' \Sigma \mathfrak{X}'.$$

Jene Abschnitte $\mathfrak{X}_1'$, $\mathfrak{X}_2' \ldots$ denken wir uns nun als parallele Kräfte an den betreffenden Angriffspunkten der gegebenen Kräfte P wirken, wobei wir ihnen die Vorzeichen geben, die ihnen als Momente zukommen (s. § 73). Wir verfahren dann mit diesen neuen Kräften ganz so, wie vorhin mit den gegebenen. Wir richten sie also parallel zur Linie M_x, projiciren sie auf die Ebene E_x' und zeichnen zu ihren Projectionen in letzterer Ebene das Kräfte- und Seilpolygon. Als ersteres kann sogleich die Aufeinanderfolge der Abschnitte in der Linie M_x genommen werden. Das für irgend einen Pol desselben zu zeichnende Seilpolygon ist zwischen denselben Parallellinien zu ziehen, wie das oben schon construirte. Die Abschnitte $\mathfrak{X}_1''$, $\mathfrak{X}_2'' \ldots$, welche auf einander folgende Seiten desselben auf der Linie M_x machen, sind die statischen Momente jener Abschnitte $\mathfrak{X}_1'$, $\mathfrak{X}_2' \ldots$ in Bezug auf die Ebene E_x, reducirt auf eine Basis, die in dem betreffenden Kräftepolygon auf bekannte Weise zu finden ist. Bezeichnen wir diese Basis mit H_x'', so folgt

$$\Sigma \mathfrak{X}' x = H_x'' \Sigma \mathfrak{X}''.$$

Nun gibt jeder Abschnitt $\mathfrak{X}'$, multiplicirt mit der Basis H_x', das statische Moment der betr. Kraft P in Bezug auf die Ebene E_x. Es ist folglich

$$\Sigma \mathfrak{X}' x = \Sigma \frac{P x}{H_x'} x = \frac{1}{H_x'} \Sigma P x^2 = H_x'' \Sigma \mathfrak{X}''$$

und daraus

$$\Sigma P x^2 = H_x' H_x'' \Sigma \mathfrak{X}''.$$

Indem wir so für die erste Momentenebene E_x fortfahren, finden wir offenbar

$$\Sigma P x^m = H_x' H_x'' \ldots H_x^{(m)} \Sigma \mathfrak{X}^{(m)}.$$

Auf die zweite Momentenebene E_y übergehend, bringen wir wieder die Abschnitte $\mathfrak{X}^{(m)}$ als parallele Kräfte in den Angriffspunkten der betr. Kräfte P an, nehmen eine beliebige Projectionsebene E_y' und stellen jene Abschnitte parallel zu ihrer Durchschnittslinie M_y mit der Ebene E_y. In dieser Stellung projiciren wir sie nach irgend einer zur Ebene E_y parallelen Richtung auf E_y' und zeichnen in dieser letzteren Ebene das Kräfte- und Seilpolygon aus ihren Projectionen. Die Abschnitte der auf einander folgenden Seiten des letzteren auf der Linie M_y, welche Abschnitte wir mit $\mathfrak{Y}_1'$, $\mathfrak{Y}_2' \ldots$ bezeichnen wollen, sind die statischen Momente der Abschnitte $\mathfrak{X}^{(m)}$ bezüglich der Ebene E_y und reducirt auf eine in bekannter Weise zu erhaltende Basis, die mit H_y' bezeichnet sein möge. Es ist folglich

$$\Sigma \mathfrak{X}^{(m)} y = H_y' \Sigma \mathfrak{Y}',$$

oder, da jeder Abschnitt $\mathfrak{X}^{(m)}$, multiplicirt mit dem Product der vorhergehenden Momentenbasen, gleich $P x^m$ ist,

$$\Sigma \mathfrak{X}^{(m)} y = \sum \frac{P x^m}{H_x' H_x'' \ldots H_x^{(m)}} y = \frac{1}{H_x' H_x'' \ldots H_x^{(m)}} \Sigma P x^m y$$

und daher

$$\Sigma P x^m y = H_x' H_x'' \ldots H_x^{(m)} H_y' \Sigma \mathfrak{Y}'.$$

Indem man in dieser Weise für die Ebene E_y fortfährt, dann auf die Ebene E_z übergeht und betreffs dieser dieselbe Methode beibehält, findet man offenbar, vorausgesetzt, dass man sich auf jene drei Momentenebenen beschränkt,

$$\Sigma P x^m y^n z^k = H_x' H_x'' \ldots H_x^{(m)} H_y' H_y'' \ldots H_y^{(n)} H_z' H_z'' \ldots H_z^{(k)} \Sigma \mathfrak{Z}^{(k)}.$$

Das höhere Moment $\Sigma P x^m y^n z^k$ von der $m + n + k^{ten}$ Ordnung stellt sich also als Product aus $m + n + k + 1$ Längengrössen dar. Davon ist eine, gleichviel welche, auf dem Kräftemassstab zu messen, die übrigen sind sämmtlich auf dem Längenmassstab abzugreifen. Das Vorzeichen der Momente ist so zu bestimmen, dass man demjenigen Abschnitt $\mathfrak{Z}^{(k)}$ die positive Richtung beilegt, der einer Kraft P angehört, deren Richtung als positiv angenommen wurde, und für welche das Produkt $x^m y^n z^k$ ein positives Vorzeichen erhält. Die Basen H sind dann durchweg als absolute Grössen aufzufassen.

§ **111. Definition und Construction der Trägheitsmomente.** — In den Anwendungen kommen ausschliesslich nur Momente zweiter Ordnung vor, und unter diesen wieder am häufigsten diejenigen, welche nur auf eine einzige Momentenebene, E_x, bezogen sind und daher die Form $\Sigma P x^2$ haben. Wir nennen diese letzteren Trägheitsmomente in Bezug auf die Ebene E_x. Die Construction derselben ist in der oben gegebenen allgemeinen Ausführung bereits enthalten; wir wollen sie jedoch, der Wichtigkeit der Sache halber, mit kurzen Worten wiederholen.

Nachdem man eine Projectionsebene E_x' angenommen und die gegebenen Kräfte P_1, P_2... parallel zu ihrer Durchschnittslinie M_x mit der Momentenebene gestellt hat, projicirt man die Kräfte parallel zu letzterer auf die Projectionsebene und zeichnet in dieser das Kräfte- und Seilpolygon aus den erhaltenen Projectionen. Die Abschnitte der auf einander folgenden Seiten des letzteren mit der Linie M_x betrachtet man als neues Kräftepolygon, für das man einen Pol annimmt, und zu dem man dann zwischen denselben Parallellinien wie vorhin das Seilpolygon zeichnet. Die Abschnitte der auf einander folgenden Seiten desselben mit der Linie M_x geben die Trägheitsmomente der einzelnen Kräfte in Bezug auf die Ebene E_x, und ihre algebraische Summe oder der Abschnitt zwischen den äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons ist das Trägheitsmoment des ganzen Kräftesystems in Bezug auf dieselbe Ebene. Diese Trägheitsmomente sind reducirt auf das Product zweier Momentenbasen, die in den beiden Kräftepolygonen auf die bekannte Weise aus der Lage des Pols zur Kräftelinie erhalten werden. In dem speciellen Fall, wo die Projectionsebene parallel zu der Richtung ist, in welcher die Entfernungen x der Angriffspunkte von der Momentenebene gemessen werden, sind jene Basen die in der Richtung der x gemessenen Entfernungen der Pole von der Kräftelinie in den betreffenden Kräftepolygonen.

Aus obiger Construction geht, wie leicht zu sehen, hervor, dass der Sinn des Abschnittes, welcher das reducirte Trägheitsmoment einer Kraft der Grösse und dem Vorzeichen nach repräsentirt, von dem Sinne der Kraft abhängig ist, dagegen nicht geändert wird, wenn man dieselbe von einer Seite der Momentenebene auf die andere verlegt. Das Vorzeichen des Trägheitsmomentes einer Kraft kann also stets übereinstimmend mit dem der Kraft selbst gewählt werden, und dies ist auch von vornherein klar, denn das Product $P x^2$ ändert zwar sein Vorzeichen mit P, nicht aber mit der Entfernung x.

Wenn die sämmtlichen Angriffspunkte der Kräfte in einer und derselben Ebene gelegen sind, so bezieht man ihre Trägheitsmomente, ganz so wie früher (§ 76) die statischen, nicht mehr auf eine Ebene, sondern auf eine Axe M_x in der Ebene der Angriffspunkte, indem man sich letztere zugleich als Projectionsebene genommen denkt. Es braucht wohl nicht nochmal wiederholt zu werden, welche Construction in dieser Ebene vorzunehmen ist, um das Trägheitsmoment der Kräfte zu finden.

Werden die bei der Bestimmung der Trägheitsmomente vorkommenden Längendimensionen (Entfernungen) in Metern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt, so erhält das Trägheitsmoment den Namen Quadratmeter-Kilogramm.

§ **112. Schwungradius eines Systems paralleler Kräfte.** — Das Trägheitsmoment eines Systems paralleler Kräfte P_1, P_2... in Bezug auf eine Momentenebene E, von welcher die Angriffspunkte die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen q_1, q_2... haben, also der Ausdruck

$$\Sigma P q^2$$

ist nach Obigem ein Product aus drei Längengrössen, von denen eine auf dem Kräfte-, die beiden anderen auf dem Längenmassstab zu messen sind. Es kann daher auch als Product aus dem Quadrat einer Längengrösse k in die Summe der gegebenen Kräfte vorgestellt werden, wobei jene Längengrösse der Gleichung

$$\Sigma P q^2 = k^2 \Sigma P$$

genügen muss. Wir nennen k, analog mit einem ähnlichen Ausdruck der Dynamik bei den Trägheitsmomenten in Bezug auf Axen, den Schwungradius der Kräfte P. Dabei müssen wir sogleich ausdrücklich darauf aufmerksam machen, dass in dem allgemeinen Fall, wo wir von parallelen Kräften überhaupt sprechen, also verschiedenen Sinn derselben zulassen, das Vorzeichen von k^2 positiv oder negativ werden kann. Es ist positiv, wenn das Vorzeichen des Gesammt-Trägheitsmomentes $\Sigma P q^2$ mit dem der Summe der Kräfte, ΣP, übereinstimmt; negativ, wenn dies nicht der Fall ist. In letzterem Falle verstehen wir unter Schwungradius die Quadratwurzel aus dem absoluten Werth von $k^2 = \frac{\Sigma P q^2}{\Sigma P}$. Wenn das Kräftesystem bloss parallele Kräfte von einerlei Sinn enthält, dann ist $\Sigma P q^2$ und ΣP, folglich auch k^2 allemal positiv.

Um das Trägheitsmoment des gegebenen Systems paralleler Kräfte zu finden, müssen nach dem vorigen § in der Projectionsebene, welche am besten parallel zur Richtung der q angenommen wird, zwei Kräfte- und Seilpolygone gezeichnet werden. Nennt man, unter Voraussetzung obiger Lage der Projectionsebene, H und H′ die in der Richtung der q gemessenen Entfernungen der Pole in den Kräftepolygonen von den Kräftelinien derselben, bezeichnet man ferner die Abschnitte der auf einander folgenden Seiten der Seilpolygone auf der Schnittlinie der Projections- und Momentenebene mit P'_1, $P'_2 \ldots$ und bezw. mit P''_1, $P''_2 \ldots$, dann ist

$$\Sigma P q^2 = H H' \ \Sigma P'',$$

und wir können daher den Schwungradius aus der Gleichung finden

$$H H' \ \Sigma P'' = k^2 \ \Sigma P,$$

woraus

$$k = \sqrt{\frac{H H' \ \Sigma P''}{\Sigma P}}.$$

Dieser Ausdruck, in dem wir den Radicanden stets nur seinem absoluten Werth nach nehmen, ist leicht zu construiren. Sei z. B. 0nC (Fig. 71ª) das erste jener Kräftepolygone, 0n die Kräftelinie, welche die Kräfte P enthält, C der Pol, CT die in der Richtung q gemessene Basis H. Macht man 0b gleich der zweiten Basis H′ und zieht bc parallel zu nC, ct parallel zu CT, so ist

$$ct = h = \frac{H H'}{\Sigma P},$$

wodurch

$$k = \sqrt{h \ \Sigma P''}$$

Fig. 71

wird. Bedeutet also in Fig. 71ᵇ $m''_0 m''_n$ den Abschnitt, welchen die äussersten Seiten des zweiten Seilpolygons auf der Durchschnittslinie der Momenten- und Projectionsebene machen, d. h. ist $m''_0 m''_n = \Sigma P''$, so erhält man k, wenn man $m''_0 m''_n$ um $m''_n L = h$ verlängert, über der Summe beider als über einem Durchmesser einen Halbkreis beschreibt und in ihrem Zusammenstossungspunkt eine Senkrechte $m''_n K$ auf dem Durchmesser errichtet, bis sie die Peripherie des Halbkreises in K durchschneidet. Diese Senkrechte $m''_n K$ ist der gesuchte Schwungradius k.

Im Allgemeinen können die Basen H und H′ willkürlich angenommen werden. Steht in einem speciellen Fall kein Hinderniss

entgegen, so ist es für die Bestimmung des Schwungradius vortheilhaft, die Länge der ersten (oder auch der zweiten) Basis H gleich der von ΣP anzunehmen. Dann wird

$$k = \sqrt{H' \Sigma P''}.$$

Man hat folglich in Fig. 71ᵇ $m_0'' m_n''$ einfach um die zweite Basis H′ zu verlängern und dann ganz so zu verfahren wie oben, um k zu erhalten.

§ 113. Trägheitsfläche eines Systems paralleler Kräfte; das Trägheits-Ellipsoid und die Trägheits-Hyperboloide. — Denkt man sich zu beiden Seiten der Momentenebene E eines Systems paralleler Kräfte P zwei zu ihr parallele Ebenen E′ und E″ in Entfernungen $+k$ und $-k$, welche gleich dem Schwungradius sind, geführt, wobei diese Entfernungen in derselben Richtung gemessen werden, wie diejenigen q der Angriffspunkte der Kräfte von der Momentenebene, dann ist zunächst leicht zu zeigen, dass die Stellung dieser Ebenen zur Momentenebene von der Richtung, in welcher die q und k gemessen werden, ganz unabhängig ist. Denn ändert sich die Richtung der q, so ändern sich die Grössen derselben in einem und demselben bestimmten Verhältniss. In dem nämlichen Verhältniss muss sich also, da die Kräfte selbst die gleichen bleiben, der Gleichung

$$\Sigma P q^2 = k^2 \Sigma P$$

zufolge, der Schwungradius k ändern. Trägt man nun denselben wieder in der neuen Richtung der q zu beiden Seiten der Momentenebene auf, so erhält man die nämlichen beiden Ebenen E′ und E″. Diese sind also lediglich von den Kräften P und der gegenseitigen Lage ihrer Angriffspunkte unter sich und zur Ebene E abhängig; und es existiren bei einem gegebenen Kräftesystem für jede Momentenebene E zwei völlig bestimmte Ebenen E′ und E″. Diese letzteren haben aber eine höchst merkwürdige Eigenschaft. Denkt man sich nämlich, die Momentenebene drehe sich um einen beliebigen Punkt O, und stellt man sich zu jeder ihrer Stellungen die zugehörigen Ebenen E′ und E″ vor, so berühren (umhüllen) diese letzteren eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkt, der mit jenem festen Punkte O zusammenfällt.

Um dies zu beweisen, legen wir ein beliebiges, recht- oder schiefwinkeliges Coordinatensystem XYZ zu Grunde, dessen Anfangspunkt mit dem Punkte O, um welchen sich die Momentenebene dreht, zusammenfällt. Wir bezeichnen die Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2 ... in diesem System mit $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ ... Von jedem dieser Angriffspunkte A denken wir uns eine Linie AB parallel zur ZAxe auf die XYEbene gezogen und durch den Fusspunkt B in letzterer Ebene eine Parallele BC zur YAxe, bis sie die XAxe im Punkte C schneidet. Dann sind in dem Linienzug OCBA die Stücke $OC = x$, $CB = y$ und $BA = z$. Wir legen nun durch den Punkt O eine beliebige Momentenebene E und projiciren parallel zu ihr für jeden der Anffriffspunkte den Linienzug OCBA auf die Linie q, welche die Entfernung des Angriffspunktes von der Momentenebene misst. Dann ist offenbar q selbst die Projection jenes Linienzuges.

Bezeichnen wir nun mit α, β, γ die Verhältnisszahlen, mit welchen Strecken, die bezw. in der Richtung der X, Y oder ZAxe liegen, multiplicirt werden müssen, um ihre Projectionen parallel zur Ebene E auf eine Linie in der Richtung der q zu erhalten, so ist offenbar

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

für jeden Angriffspunkt, und daher

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

oder, da für eine und die nämliche Ebene E und Richtung q die α, β, γ constante Grössen sind,

$$\Sigma P q^2 = \alpha^2 \Sigma P x^2 + \beta^2 \Sigma P y^2 + \gamma^2 \Sigma P z^2 + 2\beta\gamma \Sigma P y z + 2\alpha\gamma \Sigma P x z + 2\alpha\beta \Sigma P x y.$$

In diesem Ausdruck werden sich nun mit der Stellung der Ebene E und der Richtung der q wohl α, β, γ, nicht aber die Ausdrücke $\Sigma P x^2$, $\Sigma P y^2$ u. s. w. ändern. Diese sind nichts anderes als die Momente zweiter Ordnung des gegebenen Kräftesystems für die Coordinatenebenen, die Entfernungen

der Angriffspunkte stets in der Richtung der betr. Coordinatenaxen gemessen. Sie sind bestimmt, sobald das Kräftesystem gegeben und das Coordinatensystem angenommen ist. Setzen wir
$\Sigma P x^2 = a^2 \Sigma P$; $\Sigma P y^2 = b^2 \Sigma P$; $\Sigma P z^2 = c^2 \Sigma P$; $\Sigma P y z = d^2 \Sigma P$; $\Sigma P x z = e^2 \Sigma P$; $\Sigma P x y = f^2 \Sigma P$, so sind a, b, c die Schwungradien der Trägheitsmomente bezüglich der drei Coordinatenebenen, und die obige Gleichung geht über in

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P \left(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2 + 2\beta\gamma d^2 + 2\alpha\gamma e^2 + 2\alpha\beta f^2\right).$$

Denken wir uns für die angenommene Stellung der Momentenebene E den Schwungradius k gefunden und die Ebenen E′ und E″ in den in der Richtung der q gemessenen Entfernungen $+k$ und $-k$ von der Ebene E parallel zu dieser gestellt, bezeichnen wir ferner die Abschnitte, welche diese Ebenen auf den Coordinatenaxen machen, mit $\pm \mathfrak{x}$, $\pm \mathfrak{y}$, $\pm \mathfrak{z}$, und projiciren wir diese Abschnitte parallel zur Ebene E auf die Richtungen der k oder q, so ergeben sich die Relationen

$$k = \alpha \mathfrak{x} = \beta \mathfrak{y} = \gamma \mathfrak{z},$$

woraus

$$\alpha = \frac{k}{\mathfrak{x}};\ \beta = \frac{k}{\mathfrak{y}};\ \gamma = \frac{k}{\mathfrak{z}}.$$

Dies in die oben erhaltene Gleichung eingesetzt, gibt

$$\Sigma P q^2 = k^2 \Sigma P \left(\frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{c^2}{\mathfrak{z}^2} + \frac{2d^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \frac{2e^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} + \frac{2f^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\right),$$

worin k^2 eine wesentlich positive Grösse ist. Setzen wir in dem Ausdruck links vom Gleichheitszeichen den ihm gleichen $k^2 \Sigma P$, so müssen wir uns erinnern, dass in dem allgemeinen Fall, wo es sich um parallele Kräfte mit verschiedenem Sinn handelt, das Quadrat des Schwungradius in dem zuletzt angeführten Ausdruck sowohl positiv als negativ werden kann. Um das anzudeuten schreiben wir

$$k^2 \Sigma P \left(\frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{c^2}{\mathfrak{z}^2} + \frac{2d^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \frac{2e^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} + \frac{2f^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\right) = \pm k^2 \Sigma P,$$

woraus folgt

$$\varphi)\qquad \frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{c^2}{\mathfrak{z}^2} + \frac{2d^2}{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \frac{2e^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} + \frac{2f^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \pm 1.$$

Verändert man nun die Stellung der Momentenebene E so, dass sie stets durch den Punkt O geht, und denkt man sich für jede dieser Stellungen die Ebenen E′ und E″ und ihre Abschnitte $\pm \mathfrak{x}$, $\pm \mathfrak{y}$, $\pm \mathfrak{z}$ auf den Coordinatenaxen, so ist obige Gleichung diejenige einer Fläche, welche die Ebenen E′ und E″ umhüllen, ausgedrückt in Ebenen-Coordinaten. Sie ist eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkt, dem Anfangspunkt O des Coordinatensystems, um den sich die Momentenebene dreht. Kennt man sie für ein gegebenes Kräftesystem, so ist das Trägheitsmoment desselben für jede durch ihren Mittelpunkt gehende Momentenebene E leicht zu erhalten. Man darf nur parallel zu E zwei Tangentialebenen an die Fläche legen, und deren (gleiche) Entfernung von E in der Richtung messen, in welcher die Entfernungen q der Angriffspunkte von derselben Ebene genommen werden. Diese Entfernung ist der Schwungradius des Trägheitsmomentes, letzteres selbst also gleich dem Quadrat desselben multiplicirt mit der algebraischen Summe der Kräfte.

Man nennt desshalb die unter der Gleichung $\varphi)$ vorgestellte Fläche Trägheitsfläche. Um sie näher kennen zu lernen, beziehen wir sie auf ein Coordinatensystem, dessen Axen mit drei conjugirten Durchmessern der Fläche zusammenfallen. Obige Gleichung bekommt dann die Form

$$\psi)\qquad \frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} + \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = \pm 1,$$

wo $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die neuen Ebenen-Coordinaten und A, B, C die conjugirten Halbaxen der Fläche, die bezw. in die Coordinatenaxen OX, OY, OZ fallen, bezeichnen. A, B, C sind also die in der Richtung

der betr. Coordinatenaxen gemessenen Schwungradien des Kräftesystems für die Coordinatenebenen YZ, XZ und bezw. XY, und folglich

$$A^2 = \frac{\Sigma PX^2}{\Sigma P}, \quad B^2 = \frac{\Sigma PY^2}{\Sigma P}, \quad C^2 = \frac{\Sigma PZ^2}{\Sigma P},$$

wo X, Y, Z die Punkt-Coordinaten der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte bezeichnen.

Wenn nun sämmtliche Kräfte des gegebenen Systems einerlei Sinn haben, so ist k^2, das Quadrat des Schwungradius, für jede Stellung der Momentenebene positiv; im Gleichen sind A^2, B^2, C^2 positive Grössen, die Gleichung ψ) geht folglich in die

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} + \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = 1$$

über, die Trägheitsfläche wird ein Ellipsoid, das Trägheits-Ellipsoid.

Enthält aber das Kräftesystem Kräfte von verschiedenem Sinn, so wird es Stellungen der Momentenebene geben können, wo k^2 positiv, und andere, wo k^2 negativ wird; es ist dann in der Gleichung ψ) rechts vom Gleichheitszeichen das Doppelzeichen beizubehalten, und wir bekommen als Trägheitsfläche eine Doppelfläche. In diesem Falle wird dann stets entweder eines oder zwei von den Quadraten A^2, B^2, C^2 negativ werden. Im ersten Falle erhalten wir die Doppelfläche

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} - \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = \pm 1,$$

im zweiten Falle die

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} - \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} - \frac{C^2}{\mathfrak{Z}^2} = \pm 1.$$

Beidesmal besteht die Doppelfläche aus zwei zusammengehörigen Hyperboloiden, einem einmanteligen und einem zweimanteligen, mit gleichem Mittelpunkt, gleichen conjugirten Halbaxen und einem gemeinschaftlichen Asymptotenkegel.

Umgekehrt, findet sich bei der sogleich zu lehrenden Construction der Trägheitsfläche, dass nicht alle drei Quadrate A^2, B^2, C^2 der Schwungradien für die drei conjugirten Coordinatenebenen positiv sind, sondern einer oder zwei negativ, so hat man in der Gleichung ψ) sofort das Doppelzeichen ± 1 zu setzen und erhält als Trägheitsfläche eine, aus einem einmanteligen und einem zweimanteligen Hyperboloid bestehende Doppelfläche. Für jede Stellung der Momentenebene, die stets durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt jener Flächen hindurchgeht, erhält man ein Paar gleichweit von ihr entfernter Tangentialebenen E′ und E″ entweder nur am einmanteligen, oder nur am zweimanteligen Hyperboloid. Ihre Entfernung von der Momentenebene, gemessen in der Richtung der q, ist der Schwungradius k des Kräftesystems für jene Ebene. Dessen Quadrat ist positiv, wenn die Tangentialebenen E′ und E″ das eine von den beiden Hyperboloiden berühren, negativ, wenn das andere berührt wird. In dem Falle, wo das Quadrat einer einzigen der conjugirten Halbaxen negativ wird, liefert das einmantelige Hyperboloid positive, das zweimantelige negative k^2; das Gegentheil aber findet statt, wenn die Quadrate zweier conjugirter Halbaxen negativ werden.

Wenn die Momentenebene den gemeinschaftlichen Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide berührt, werden die Tangentialebenen E′ und E″ Asymptotenebenen und fallen mit der Ebene E zusammen. Der Schwungradius k und somit das Trägheitsmoment des gegebenen Kräftesystems ist für solche Lagen der Momentenebene Null.

§ 114. Trägheits-Curve, Trägheits-Ellipse und Trägheits-Hyperbeln. — Wenn die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte des gegebenen Systems in einer und der nämlichen Ebene liegen, so tritt an die Stelle der Momentenebene E eine Momentenaxe M in jener Ebene. In Bezug auf dieselbe hat der Schwungradius k dieselbe Bedeutung wie oben, er hat nämlich der Bedingung zu genügen

$$\Sigma Pq^2 = k^2 \Sigma P.$$

Werden zu beiden Seiten der Axe M zwei Parallele M′ und M″ in der nach der Richtung der q gemessenen Entfernung k gezogen, und dreht man die Axe M um einen beliebigen Punkt O in ihr, so tangiren (umhüllen) die zugehörigen Linien M′ und M″ eine Curve zweiten Grades, deren Gleichung in Linien-Coordinaten für ein beliebiges System, dessen Anfangspunkt O ist,

$$\varphi) \qquad \frac{a^2}{\mathfrak{x}^2} + \frac{b^2}{\mathfrak{y}^2} + \frac{2\,d^2}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \pm 1$$

wird. Die Curve hat also einen Mittelpunkt, den Punkt O. Kennt man sie, so erhält man das Trägheitsmoment des gegebenen Kräftesystems für irgend eine durch ihren Mittelpunkt gehende Momentenaxe, wenn man parallel zu dieser zwei Tangenten an die Curve zieht. Die beiderseits gleiche, in der Richtung der q gemessene Entfernung derselben von M ist der Schwungradius k des Trägheitsmomentes. Desshalb heisst man jene Curve Trägheits-Curve.

Bezieht man sie auf ein Paar ihrer conjugirten Durchmesser, so wird ihre Gleichung in Linien-Coordinaten

$$\psi') \qquad \frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = \pm 1,$$

wo $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, A und B ganz ähnliche Bedeutungen wie oben haben.

Sind sämmtliche Kräfte des gegebenen Systems in gleichem Sinn gerichtet, so wird für jede Stellung der Momentenaxe k^2 positiv, folglich werden auch A^2 und B^2 positiv und die Gleichuug ψ') geht über in die

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = 1,$$

welche einer Ellipse angehört, der Trägheits-Ellipse.

Gibt es aber Stellungen der Axe M, für welche k^2 negativ wird, so wird immer eines der Quadrate der Halbaxen, A^2 oder B^2, auch negativ, und wir erhalten als Trägheitscurve diejenige Doppelcurve, deren Gleichung

$$\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = \pm 1$$

oder

$$-\frac{A^2}{\mathfrak{X}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{Y}^2} = \pm 1$$

ist. Beide Fälle fallen in einen zusammen; die Doppelcurve besteht immer aus zwei Hyperbeln mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt, gleichen (nur vertauschten) Halbaxen und gemeinschaftlichen Asymptoten. Für jede durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gelegte Momentenaxe M erhält man ein Paar zu ihr parallele Tangenten M′ und M″ entweder an der einen, oder an der anderen Hyperbel. Das entsprechende k^2 ist positiv für die Berührung an der einen, negativ für die Berührung der anderen Hyperbel. Wird bei der sogleich zu lehrenden Construction der Doppelcurve das Quadrat derjenigen Halbaxe B, die auf der Y-Axe liegt, negativ, so liefert diejenige Hyperbel, deren imaginäre Axe in der Y-Axe liegt, positive k^2, die andere negative, und umgekehrt in dem anderen Fall. Wenn die Momentenaxe M mit einer der beiden gemeinschaftlichen Asymptoten zusammenfällt, so wird der Schwungradius und somit das Trägheitsmoment des gegebenen Kräftesystems in Bezug auf sie Null.

§ 115. **Construction der Trägheitsfläche im Allgemeinen.** — Die Trägheitsfläche eines gegebenen Systems paralleler Kräfte für einen gegebenen Punkt O als Mittelpunkt ist bestimmt durch irgend drei conjugirte Durchmesser. Wir werden sogleich einen Satz kennen lernen, mittelst dessen die Richtungen von drei solchen Durchmessern gefunden werden können. Sind diese bekannt, so hat die Aufsuchung der Längen der Halbdurchmesser keine Schwierigkeit mehr. Jeder ist der Schwungradius des Trägheitsmoments des gegebenen Kräftesystems für die ihm conjugirte Ebene,

welche durch die beiden anderen hindurchgeht, und für Entfernungen, die parallel zu ihm gemessen werden. Der oben erwähnte Satz lautet:

Wenn man die statischen Momente der Kräfte eines gegebenen Parallel-Kräftesystems in Bezug auf irgend eine Momentenebene aufsucht, sie als Parallelkräfte in den gegebenen Angriffspunkten anbringt und den Mittelpunkt dieser letzteren bestimmt, so ist jede Verbindungslinie dieses Mittelpunktes mit einem Punkt O der Momentenebene dieser Ebene in derjenigen Trägheitsfläche des Kräftesystems conjugirt, deren geometrischer Mittelpunkt der Punkt O ist.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Bevor wir ihn jedoch antreten, wollen wir bemerken, dass wir in Zukunft den Mittelpunkt paralleler Kräfte, um Verwechslungen mit geometrischen Mittelpunkten zu vermeiden, Schwerpunkt dieser Kräfte nennen wollen, ohne also damit vorauszusetzen, dass bloss von Schwerkräften die Rede sei. Bezeichnen wir die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen der Angriffspunkte des gegebenen Kräftesystems von der Momentenebene E mit z, so sind die statischen Momente Pz der Kräfte ihrer absoluten Grösse nach zwar abhängig von der Richtung, in welcher die Entfernungen z gemessen werden, aber ihr gegenseitiges Verhältniss bleibt dasselbe für alle Richtungen der z. Wenn sie also, nachdem sie für irgend eine Richtung gefunden sind, an den Angriffspunkten als Parallelkräfte wirkend gedacht werden, so bleibt ihr Schwerpunkt immer der nämliche, wie auch später die Richtung der z abgeändert werden möge. Für jede Ebene, welche durch jenen Schwerpunkt hindurchgeht, ist das statische Moment der als Kräfte gedachten statischen Momente Null. Denkt man sich folglich in der Momentenebene E einen Punkt O als Anfangspunkt eines Coordinatensystems OXYZ genommen, dessen beide Axen OX und OY beliebig in der Ebene E liegen, und dessen Axe OZ die Verbindungslinie seines Anfangspunktes mit dem oben gefundenen Schwerpunkt ist, so gehen die beiden Coordinaten-Ebenen XZ und YZ durch jenen Schwerpunkt und die statischen Momente der als Kräfte gedachten und auf die Ebene E bezogenen statischen Momente der gegebenen Kräfte sind folglich für jene Coordinatenebenen gleich Null. Sie sind aber, vorausgesetzt, dass jetzt die Entfernungen der Angriffspunkte von den Coordinatenebenen in der Richtung der Axen gemessen werden, nichts anderes als die Trägheitsmomente zweiter Ordnung ΣPxz und ΣPyz; und wenn diese Null sind, so folgt aus der allgemeinen Gleichung φ) der Trägheitsfläche (S. 120), dass die Z-Axe der XY-Ebene in der Trägheitsfläche mit dem Mittelpunkt O conjugirt ist. Dies ist der zu beweisende Satz.

Um mittelst desselben drei conjugirte Durchmesser der Trägheitsfläche eines gegebenen Kräftesystems für einen Punkt O als Mittelpunkt zu finden, legt man durch letzteren Punkt eine beliebige Ebene E und sucht die statischen Momente der Kräfte in Bezug auf diese Ebene in der bekannten Weise, wobei die Entfernungen der Angriffspunkte in irgend einer beliebigen Richtung gemessen werden können. Diese statischen Momente, oder auch nur die Abschnitte, welche zwischen den Seiten des zu construirenden Seilpolygons liegen, denkt man sich als Parallelkräfte an den gegebenen Angriffspunkten wirken und sucht nach der im § 71 gezeigten Methode ihren Schwerpunkt. Dessen Verbindungslinie mit dem Punkt O ist der Ebene E in der zu suchenden Trägheitsfläche conjugirt und wird als einer der zu suchenden conjugirten Durchmesser OZ genommen. Ein zweiter, OX, kann in der Ebene E beliebig angenommen werden. Der dritte, OY, wird dann für die Ebene OXZ als Momentenebene auf demselben Wege gefunden, wie der erste, OZ, für die Ebene E. Da er, ebenso wie OX, in der letzteren ursprünglich angenommenen Ebene liegen muss, so muss auch der Schwerpunkt der als Kräfte gedachten statischen Momente, die in Bezug auf die Ebene OXZ genommen werden, in der Ebene E liegen, und es genügt daher, den Schwerpunkt der Projectionen jener Momente auf der Ebene E aufzusuchen, wozu es nur zweier Kräfte- und zugehörigen Seilpolygone bedarf. Wie dann, nachdem die Richtungen dreier conjugirter Durchmesser gefunden sind,

die Längen derselben, bezw. der Halbdurchmesser erhalten werden können, wurde bereits oben erörtert.

§ 116. Construction der Trägheitscurve im Allgemeinen. — Für Kräfte, deren Angriffspunkte sämmtlich in einer Ebene liegen, geht der oben erwiesene Satz, wie leicht zu sehen, in folgenden über:

Wenn man für irgend eine Axe M in der Ebene der Angriffspunkte die statischen Momente der Kräfte sucht, sie als parallele Kräfte an den Angriffspunkten jener wirken denkt und ihren Mittelpunkt construirt, so ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit irgend einem Punkte O der Axe M dieser letzteren in derjenigen Trägheitscurve des gegebenen Kräftesystems conjugirt, deren Mittelpunkt jener Punkt O ist.

Der Beweis dieses Satzes ist ganz ähnlich zu führen, wie der für den allgemeinen Satz im vorigen §, und es lässt sich unmittelbar daraus, ebenfalls ganz so wie dort, das Verfahren entnehmen, wie man für ein gegebenes Kräftesystem, dessen Angriffspunkte in einer und derselben Ebene liegen, ein Paar conjugirte Durchmesser der Trägheitscurve findet, deren Mittelpunkt O gegeben ist.

§ 117. Erstes Beispiel: Construction des Trägheits-Ellipsoids für vier gleichgerichtete parallele Kräfte. — Beispielshalber lösen wir in Fig. 24 Taf. IX die Aufgabe, das Trägheits-Ellipsoid für vier gleichgerichtete parallele Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ zu finden, wenn der Mittelpunkt O desselben gegeben ist. Zu diesem Behufe legen wir durch den Punkt O die beiden, auf einander senkrecht stehenden Tafeln eines Risssystems, also die Axe XX desselben. Die Risse der Angriffspunkte in jenen Tafeln seien $A'_1, A'_2 \ldots A'_4$ und $A''_1, A''_2 \ldots A''_4$. Die Kräfte selbst wurden sogleich zu dem Kräftepolygon 0 1 2 3 4 in der Axe XX an einander getragen. Als Momentenebene, welche beliebig durch den Punkt O gelegt werden darf, nehmen wir die erste Tafel und suchen den dieser Tafel conjugirten Durchmesser in dem Trägheitsellipsoid, dessen Mittelpunkt O ist.

Zu diesem Zwecke construiren wir die statischen Momente der gegebenen Kräfte für die erste Tafel, indem wir die zweite Tafel als Projectionsebene annehmen und die Kräfte parallel zu XX stellen. Ihre Angriffspunkte projiciren wir in orthogonaler Richtung auf die zweite Tafel, so dass $A''_1, A''_2 \ldots A''_4$ selbst sogleich die gesuchten Projectionen sind. In diesen denken wir uns die Kräfte parallel zur Axe XX wirken und zeichnen zu dem Kräftepolygon C 0 1 2 3 4, dessen Pol C beliebig angenommen werden kann, das Seilpolygon 0 I II ... V. Die auf einander folgenden Seiten desselben treffen die Schnittlinie XX der Projections- und Momentenebene in den Punkten 0, 1', 2', 3', 4'. Die Abschnitte 0 1', 1' 2', ... 3' 4' müssen dann als Kräfte in den Punkten $A_1, A_2 \ldots A_4$ wirken gedacht und ihr Schwerpunkt gesucht werden. Dies geschah durch Construction der beiden Seilpolygone 0 I II' ... V' und 0'' I II'' ... V'' in der zweiten Tafel und des Seilpolygons 0''' I''' ... V''' in der ersten Tafel auf die bekannte Weise. Das erste und dritte dieser Seilpolygone gehören beide zum Kräftepolygon C 0 1' 2' ... 4', das man sich einmal in der ersten, dann in der zweiten Tafel liegend dachte. Die Seiten des zweiten Seilpolygons stehen auf den entsprechenden des ersten senkrecht; es gehört zu dem in der zweiten Tafel liegenden Kräftepolygon, das durch Verdrehung des Polygons C 0 1' 2' ... 4' um 90 Grad erhalten wird, aber nicht gezeichnet zu werden brauchte. Die Projectionen des so gefundenen Schwerpunkts wurden mit S', S'' bezeichnet. Seine Verbindungslinie mit O, deren Projectionen mit OZ' und OZ'' bezeichnet wurden, gibt den zur ersten Tafel conjugirten Durchmesser des Trägheits-Ellipsoids der Richtung und Lage nach.

Nachdem man dann XX als den zweiten conjugirten Durchmesser, der in der ersten Tafel willkürlich gewählt werden darf, angenommen hat, muss noch der dritte Durchmesser gesucht werden, derjenige, welcher der Ebene conjugirt ist, die durch OX und OZ hindurch geht. Zu dem Ende nehmen wir die erste Tafel als Projectionsebene, welche die Momentenebene XZ ebenfalls in der Axe XX schneidet. Dann muss man sich die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ wieder parallel zu XX an ihren

Angriffspunkten wirken denken und letztere parallel zur Ebene XZ auf die erste Tafel projiciren. Wir wählen als Richtung der Projectionsstrahlen diejenige, welche zugleich auf XX senkrecht steht und erhalten demnach auf bekannte Weise A_1''', $A_2''' \dots A_4'''$ als Projectionen der Angriffspunkte. In ihnen hat man sich die Kräfte P_1, $P_2 \dots$ parallel zu XX wirkend zu denken und ihre statischen Momente in Bezug auf XX zu suchen. Das geschah durch Construction des Seilpolygons $0^4\, I^4\, II^4 \dots V^4$, das zum Kräftepolygon C 0 1 2 ... 4 gehört, und dessen auf einander folgende Seiten die Abschnitte 0 1″, 1″2″... 3″4″ auf XX geben, welche die statischen Momente der Kräfte P_1, $P_2 \dots P_4$ bezüglich der Ebene XZ repräsentiren. Diese statischen Momente mussten nun als Kräfte in den Punkten A_1, $A_2 \dots A_4$ wirken gedacht und ihr Mittelpunkt gesucht werden. Da man weiss, dass der gesuchte conjugirte Durchmesser in der ersten Tafel liegen muss, also auch jener Mittelpunkt, so genügt es, den Mittelpunkt der Kräfte 0 1″, 1″2″... für den Fall zu finden, dass sie an den Projectionen A_1', $A_2' \dots A_4'$ oder an denen A_1''', $A_2''' \dots A_4'''$ der Angriffspunkte auf der ersten Tafel wirken. Die beiden Seilpolygone $0^4\, I^4\, II^5 \dots V^5$ und $0^6\, I^4 II^6 \dots V^6$, deren Seiten auf einander senkrecht stehen, und welche beide aus dem Kräftepolygon C 0 1″2″...4″ construirt werden, ergeben S_1' als den gesuchten Mittelpunkt. Seine Verbindungslinie mit O ist der in der ersten Tafel liegende dritte conjugirte Durchmesser OY des Trägheits-Ellipsoids.

Um die Länge der drei in OX, OY, OZ liegenden conjugirten Halbdurchmesser zu finden, muss man die Schwungradien des Kräftesystems für die Ebenen YZ, XZ, XY suchen, wobei die Entfernungen der Angriffspunkte in den Richtungen OX, OY, OZ zu messen sind. Bezüglich der Ebene XY oder der ersten Tafel wurden schon oben die Abschnitte 01′, 1′2′... als statische Momente der Kräfte P_1, $P_2 \dots$ erhalten, vorausgesetzt, dass die Entfernungen senkrecht zur ersten Tafel gemessen wurden; C0 war die zugehörige Basis. Ferner ist unter denselben Voraussetzungen der auf XX liegende Abschnitt 0z zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons 0 I II′... V′ das Gesammt-Trägheitsmoment des Kräftesystems. Da aber die Entfernungen der Angriffspunkte nicht senkrecht zur ersten Tafel, sondern in der Richtung OZ gemessen werden sollen, so darf beides Mal nicht C0 als Basis genommen werden, sondern eine Linie H_z, welche von C nach XX gezogen wurde und den nämlichen Winkel mit C0 bildet, wie jene beiden Richtungen mit einander. Das Gesammt-Trägheitsmoment in Bezug auf die erste Tafel für die Richtung OZ ist also $H_z^2 \times \overline{0z}$. Der Schwungradius wird folglich $\sqrt{\frac{H_z^2 \times 0z}{\Sigma P}}$ und ist leicht zu construiren. Ueber $\Sigma P = 04$ zieht man einen Halbkreis und trägt von einem Endpunkte 4 des Durchmessers die Basis H_z als Sehne ein; an den anliegenden Abschnitt, gleich $\frac{H_z^2}{\Sigma P}$, wird 0z gefügt, über der Summe beider ein zweiter Halbkreis beschrieben und im Zusammenfügungspunkt eine Senkrechte auf dem Durchmesser bis zur Peripherie hin errichtet. Diese Senkrechte ist der gesuchte Schwungradius und darf nur noch von O aus auf OZ aufgetragen werden, um den Endpunkt c des in OZ liegenden Halbdurchmessers zu erhalten.

In ganz gleicher Weise sind in Bezug auf die XZ-Ebene die bereits oben erhaltenen Abschnitte 01″, 1″2″... des Seilpolygons $0^4 I^4 \dots V^4$ die statischen Momente, und der Abschnitt 0y, zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons $0^4 I^4 II^5 \dots V^5$ ist das gesammte Trägheitsmoment der gegebenen Kräfte, alle reducirt auf die Basis C0 und genommen für die in der ersten Tafel liegende Richtung C0, nach der die Entfernungen gemessen werden. Da letztere aber in der Richtung OY zu nehmen sind, so muss anstatt C0 die Linie H_y als Basis genommen werden, die mit C0 denselben Winkel bildet, als OY und von C bis zur Axe XX reicht. So erhält man $H_y^2 \times \overline{0y}$ als Trägheitsmoment des Kräftesystems bezüglich der Ebene XZ und für die Richtung OY, und der Schwungradius ist folglich $\sqrt{\frac{H_y^2 \times 0y}{\Sigma P}}$. Derselbe wurde ganz ähnlich wie der andere vorhin construirt und als 0b′ auf OY′ aufgetragen.

Endlich ist noch das Gesammt-Trägheitsmoment bezüglich der Ebene YZ für die Richtung OX zu finden. Wir nehmen zu dem Zwecke wieder die erste Tafel als Projectionsebene, so dass OY′ der Schnitt derselben mit der Momentenebene wird und projiciren die Angriffspunkte parallel zur YZ-Ebene in einer zu OY′ senkrechten Richtung auf die erste Tafel. Die so erhaltenen Projectionen wurden mit A_1^{IV}, $A_2^{IV} \ldots A_4^{IV}$ bezeichnet. In ihnen hat man sich die Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_4$ parallel zu OY′ wirken zu denken und muss nun zunächst ihre statischen Momente suchen. Dies geschah mittelst des Kräftepolygons $C_1\,0\,1_1\,2_1 \ldots 4_1$, das dem $C\,0\,1 \ldots 4$ genau gleich ist, und mittelst des zugehörigen Seilpolygons $0\,I^{v}\,II^{v} \ldots V^{v}$, dessen auf einander folgende Seiten auf OY′ die Abschnitte $0\,1'''$, $1'''\,2''' \ldots 3'''\,4'''$ machen. Zu dem durch letztere bestimmten Kräftepolygon $C_1\,0\,1'''\,2''' \ldots 4'''$ wurde endlich noch das Seilpolygon $0\,I^{v}\,II^{s} \ldots V^{s}$ construirt, dessen äusserste Seiten auf OY′ das Gesammt-Trägheitsmoment $0x$ abschneiden. Beide, die statischen und die Trägheitsmomente, beziehen sich dabei wieder auf die Basis $C_1 0$, wobei die Entfernungen nach der in der ersten Tafel gelegenen Richtung $C_1 0$ zu messen sind. Da sie aber in der Richtung OX gemessen werden sollen, so muss man H_x als Basis nehmen, das parallel zu OX von C_1 nach der Axe OY′ gezogen wurde. Damit erhält man $H_x^2 \times \overline{0x}$ als Gesammt-Trägheitsmoment bezüglich der Ebene YZ für die Richtung OX und folglich $\sqrt{\frac{H_x^2 \times \overline{0x}}{\Sigma P}}$ als Schwungradius, der ganz so wie oben construirt werden kann. Auf OX als $0a$ aufgetragen gibt er den dritten Halbdurchmesser.

§ 118. Zweites Beispiel: Construction der Trägheitscurve für vier parallele Kräfte in einer Ebene. — In Fig. 25 Taf. X haben wir für den gegebenen Mittelpunkt O die Trägheitscurve eines Systems von vier parallelen, in verschiedenem Sinne gerichteten Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_4$ gesucht, deren Angriffspunkte in einer Ebene liegen. A_1, $A_2 \ldots A_4$ seien diese Angriffspunkte. Die Kräfte selbst sind sogleich in das Kräftepolygon 0 1 2 3 4 eingetragen worden, welches in der willkürlich durch O gezogenen Axe XX liegt. Diese Axe nehmen wir als den einen der zu suchenden conjugirten Durchmesser. Wir denken uns dann die Kräfte parallel zu XX an ihren Angriffspunkten wirken und suchen ihre statischen Momente bezüglich jener Linie. Dies geschah mittelst des Kräftepolygons C 0 1 2 3 4, dessen Pol C willkürlich angenommen werden konnte, und aus dem das Seilpolygon 0 I II ... V construirt wurde. Die auf einander folgenden Seiten desselben geben auf der Axe XX die Abschnitte 0 1′, 1′ 2′ ... 3′ 4′, welche, bezogen auf die Basis C0, die Momente repräsentiren, vorausgesetzt, dass die Entfernungen der Angriffspunkte senkrecht zu XX gemessen werden. Jene Abschnitte müssen dann als parallele Kräfte an den Angriffspunkten A_1, $A_2 \ldots A_4$ wirkend angenommen werden, worauf ihr Schwerpunkt mittelst des Kräftepolygons C 0 1′ 2′ ... 4′ und der beiden Seilpolygone 0 I II′ ... V′ und 0″ I II″ ... V″, deren Seiten auf einander senkrecht stehen, auf die bekannte Weise gefunden wird. Wir haben ihn mit S bezeichnet. Seine Verbindungslinie mit dem gegebenen Mittelpunkt O gibt den zu XX conjugirten Durchmesser YY der Trägheitscurve.

Um die Längen der Durchmesser oder eigentlich der Halbdurchmesser zu finden, müssen die Trägheitsmomente der Kräfte bezüglich der Axen XX und YY gesucht werden, wobei die Entfernungen der Angriffspunkte in den Richtungen YY, bezw. XX zu messen sind. Für die Axe XX sind bereits die Abschnitte 0 1′, 1′ 2′, ... 3′ 4′, die statischen Momente der Kräfte, erhalten worden, während der Abschnitt $0y$ zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons 0 I II′ ... V′ das Gesammt-Trägheitsmoment derselben ist, beide bezogen auf die Basis C0 und für Entfernungen gültig, die senkrecht auf XX gemessen werden. Da diese Entfernungen aber parallel zu YY genommen werden sollen, so muss statt der Basis C0 eine andere H_y genommen werden, die man erhält, indem man durch den Pol C eine Parallele zu YY bis an die Kräftelinie zieht. Der Schwungradius setzt sich aus den gefundenen Grössen so zusammen, wie es der Ausdruck $\sqrt{\frac{H_y^2 \times \overline{0y}}{\Sigma P}}$ zeigt, und kann hieraus

auf bekannte Weise durch Construction gefunden werden. Man zeichnet zuerst das bei c rechtwinkelige Dreieck dce, dessen Höhe $0c = H_y$, und in welchem der Abschnitt 0d der Grundlinie gleich $\Sigma P = 04$ ist. Der andere Abschnitt 0e ist folglich $\frac{H_y^2}{\Sigma P}$; indem man denselben um 0y verlängert und über der Summe ye einen Halbkreis beschreibt, erhält man den Schwungradius als die auf dem Durchmesser in 0 errichtete Senkrechte 0b′, welche als 0b vom Mittelpunk 0 aus auf den conjugirten Durchmesser YY aufzutragen ist.

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass die Kraft P_1, deren Sinn wir immer als positiv auffassen wollen und ΣP gleiches Vorzeichen, plus, dass dagegen das Gesammt-Trägheitsmoment 0y und das Trägheitsmoment 0 1″ der Kraft P_1 entgegengesetzten Sinn haben. Ersteres ist folglich negativ zu nehmen, und desshalb wird das Quadrat des Schwungradius negativ, der Schwungradius selbst also, oder der Halbdurchmesser 0b imaginär.

Um den auf XX liegenden Halbdurchmesser zu finden, hat man die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ an ihren Angriffspunkten $A_1, A_2 \ldots A_4$ parallel zu YY anzubringen. Wir zeichnen desshalb das dem C 0 1 2 3 4 ganz gleiche Kräftepolygon C_1 0 1_1 2_1 3_1 4_1 und das zugehörige Seilpolygon 0 I‴ II‴... V‴, dessen auf einander folgende Seiten die Abschnitte 0 1‴, 1‴ 2‴... 3‴ 4‴ auf YY machen. Zu dem hiedurch gebildeten Kräftepolygon C_1 0 1‴ 2‴ 3‴ 4‴ wird dann das Seilpolygon 0 I‴ $II^4 \ldots V^4$ construirt, dessen äusserste Seiten die Strecke 0x auf YY abschneiden. Diese Strecke repräsentirt das Gesammt-Trägheitsmoment der Kräfte bezüglich der Axe YY, bezogen auf die Basis $C_1 0$ und für senkrecht gemessene Entfernungen, indem $\overline{C_1 0}^2 \times \overline{0x}$ gleich jenem Trägheitsmoment ist. Da die Entfernungen schief, parallel zu XX, gemessen werden sollen, so muss die durch den Pol C_1 zu XX gezogene Parallele H_x, die bis zur Kräftelinie reicht, als Basis genommen werden, so dass der gesuchte Schwungradius $= \sqrt{\frac{H_x^2 \times \overline{0x}}{\Sigma P}}$ wird. Dieser Ausdruck wurde in ähnlicher Weise construirt, wie der ähnlich gebildete oben, und man fand so $0a' = 0a$ als Länge des gesuchten zweiten Halbdurchmessers. Derselbe ist reell, weil 0x, das Gesammt-Trägheitsmoment, das nämliche Vorzeichen hat, wie das Trägheitsmoment $0\,1^{IV}$ der als positiv angenommenen Kraft P_1. Die Trägheitscurve wird folglich eine Doppelhyperbel mit den conjugirten Halbdurchmessern 0a und 0b.

Aus diesen letzteren erhält man leicht auf bekannte Weise die gemeinschaftlichen Asymptoten JJ und KK der beiden conjugirten Hyperbeln und durch Halbirung der Asymptotenwinkel die Hauptaxen AA und BB derselben. Um die Längen der letzteren zu finden, wendet man für einen der bereits bekannten Punkte a, b der Hyperbeln, für a etwa, den Satz an, dass das Product aus seinen in der Richtung der Asymptoten gemessenen Entfernungen ai, ak von diesen Linien gleich dem vierten Theil der Quadratsumme der beiden Halbaxen ist. Sucht man daher zu ai oder 0k und ak die mittlere geometrische Proportionale kl und trägt diese doppelt vom Mittelpunkt 0 aus auf eine der Asymptoten als 0D auf, so ist dies die Diagonale eines Rechtecks, dessen Seiten 0A, 0B, auf den Hauptaxen gelegen, den halben Längen dieser Axen gleich sind. A, A, B, B sind folglich die Scheitel der beiden conjugirten Hyperbeln, von denen in der Figur Stücke gezeichnet wurden, und welche die Trägheitscurve des gegebenen Systems paralleler Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ bilden.

§ 119. Centralfläche und Centralellipsoid. Beziehungen derselben zu den Trägheitsflächen. — Diejenige Trägheitsfläche eines Systems paralleler Kräfte, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt dieser Kräfte ist, heissen wir Centralfläche des Kräftesystems; Centralellipsoid in dem Falle, wo sie ein Ellipsoid wird, was allemal stattfindet, wenn sämmtliche Kräfte in gleichem Sinne gerichtet sind.

Für die Centralfläche ist der im § 115 bewiesene Satz und das auf ihn gegründete Verfahren, die Trägheitsfläche bezw. drei conjugirte Durchmesser derselben zu finden, nicht mehr direct an-

wendbar. Denn die algebraische Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte ist für jede Momentenebene, die durch den Schwerpunkt jener gelegt wird, gleich Null. Wir finden also keinen Schwerpunkt der als Kräfte an den gegebenen Angriffspunkten wirkend zu denkenden statischen Momente (§ 74). Theilen wir aber diese (ähnlich wie dort im § 74 die Kräfte) in zwei Gruppen und suchen den Schwerpunkt jeder dieser Gruppen, so hat die Verbindungslinie der so gefundenen beiden Schwerpunkte eine für uns wichtige Eigenschaft. Für jede zu ihr parallele Momentenebene nämlich ist die algebraische Summe der statischen Momente jener als Kräfte gedachten statischen Momente, also das Moment zweiter Ordnung $\Sigma P e e'$ Null, wenn e die Entfernungen von der ersten, e' die von der zweiten Momentenebene bedeuten. Denkt man sich daher jene erste, durch den Schwerpunkt S des Kräftesystems gehende Momentenebene als XY-Ebene eines beliebigen Coordinatensystems, dessen Z-Axe durch den Schwerpunkt S parallel zu jener Verbindungslinie gelegt ist, so sind die Momente zweiter Ordnung $\Sigma P z x$ und $\Sigma P z y$ beide Null, und desshalb die Z-Axe der XY-Ebene in der Centralfläche conjugirt.

Dies gilt aber nicht bloss für die Centralfläche, sondern für jede Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt O in jener, durch den Schwerpunkt S des gegebenen Kräftesystems gehenden Momenten- oder XY-Ebene liegt. Wenn durch ihren Mittelpunkt O die Z-Axe gleichfalls parallel zu jener Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Gruppen, in welche die statischen Momente bezüglich der XY-Ebene getheilt wurden, gelegt wird, so ist sie der XY-Ebene auch in der Trägheitsfläche conjugirt. Noch mehr: Die halbe Länge des so gefundenen conjugirten Durchmessers ist in der Centralfläche sowohl, wie in der Trägheitsfläche der Schwungradius des Kräftesystems für die XY-Ebene und für die Richtung der Z-Axe. Daraus folgt also:

1. In allen Trägheitsflächen eines Systems paralleler Kräfte, deren Mittelpunkte in einer durch den Schwerpunkt der Kräfte gehenden Ebene liegen, sind die dieser Ebene conjugirten Durchmesser parallel und von gleicher Grösse.

Alle diese Trägheitsflächen werden folglich von zwei zur Mittelpunktsebene parallelen und beiderseits gleich weit von derselben entfernten Ebenen berührt. Die Entfernung dieser gemeinschaftlichen Berührungsebenen von der Mittelpunktsebene ist gleich dem Schwungradius des Kräftesystems für letztere Ebene.

Wenn man in dem Coordinatensysteme SXYZ, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S eines Kräftesystems ist, und dessen Axe SZ in der Centralfläche der XY-Ebene conjugirt ist und wie oben gefunden wurde, die Axe SX ganz beliebig annimmt, so gilt für die XZ-Ebene dasselbe wie für die XY-Ebene. Auch in Bezug auf sie ist die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte Null, und theilt man diese statischen Momente in zwei Gruppen, so hat die Verbindungslinie der Schwerpunkte derselben die Eigenschaft, dass in Bezug auf jede zu ihr parallele Ebene die Summe der statischen Momente jener als Kräfte gedachten statischen Momente oder das Moment zweiter Ordnung $\Sigma P e' e''$ Null wird, wo e' und e'' die Entfernungen von den beiden Momentenebenen bedeuten. Von der XY-Ebene haben wir oben schon bewiesen, dass für die besondere Lage, welche wir der Z-Axe gegeben haben, $\Sigma P z y$ Null wird, folglich ist jene Verbindungslinie der XY-Ebene von selbst parallel, und wenn daher in letzterer die Y-Axe, über welche noch verfügt werden kann, parallel zu jener Verbindungslinie der Schwerpunkte angenommen wird, so ist sie der XZ-Ebene in der Centralfläche conjugirt und SZ, SY und SX sind also drei conjugirte Durchmesser dieser Fläche.

Aber die letzteren Betrachtungen gelten wieder nicht bloss für die Centralfläche, sondern für jede Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt O in der durch den Schwerpunkt des Kräftesystems gehenden Axe SX liegt. Wenn durch diesen Mittelpunkt O ebenfalls eine Y-Axe parallel zur Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Gruppen gelegt wird, in welche man die statischen Momente bezüglich

der XZ-Ebene getheilt hat, so ist sie auch in der Trägheitsfläche der XZ-Ebene conjugirt; und die halbe Länge dieses conjugirten Durchmessers ist wieder, hier in der Trägheitsfläche wie dort in der Centralfläche, der Schwungradius des Kräftesystems bezüglich der Ebene XZ und für die Richtung der Y-Axe. Daraus folgt:

2. In allen Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte in einer durch den Schwerpunkt S des gegebenen Kräftesystems gehenden Geraden liegen, sind die dieser Geraden conjugirten Ebenen parallel zu einander; und zu jedem Paar conjugirter Durchmesser in einer dieser Ebenen findet sich in jeder der anderen ein Paar ihnen gleiche und parallele, welche in der betr. Trägheitsfläche unter sich und zur Axe SX conjugirt sind.

Alle diese Trägheitsflächen und die Centralfläche werden folglich von einem Cylinder zweiter Ordnung umhüllt, dessen gerade Erzeugende der Geraden, in der ihre Mittelpunkte liegen, parallel sind. Die Berührungslinien dieses Cylinders mit allen Trägheitsflächen sind congruente Curven zweiter Ordnung in parallelen Ebenen.

Die dritten conjugirten Durchmesser in der Reihe jener Trägheitsflächen, diejenigen, welche auf der Linie liegen, die alle ihre Mittelpunkte enthält, stehen auch in sehr einfacher Beziehung zu einander. Nehmen wir irgend eine solche Trägheitsfläche heraus, deren Mittelpunkt O die Entfernung i von dem Schwerpunkt S der Kräfte hat, und nennen wir E und 𝔈 die zur Linie SO conjugirten parallelen Ebenen in der Trägheits- und bezw. Centralfläche, q und $\mathfrak{q}$ die Entfernungen irgend eines Angriffspunktes von ihnen. Diese Entfernungen messen wir in der Richtung der Linie SO und nennen sie positiv, wenn der betr. Angriffspunkt nach derjenigen Seite der Ebene E bezw. 𝔈 hin liegt, auf welcher der Schwerpunkt von jener ersteren Ebene aus gelegen ist. Dann ist i, die Entfernung der beiden Ebenen, wesentlich positiv, und bezeichnen wir mit a und $\mathfrak{a}$ die Längen der ihnen in der Trägheits- bezw. Centralfläche conjugirten Halbdurchmesser, so ist

$$a^2 \Sigma P = \Sigma P q^2 \text{ und } \mathfrak{a}^2 \Sigma P = \Sigma P \mathfrak{q}^2,$$

wobei q und $\mathfrak{q}$ in der einfachen Beziehung stehen

$$q = \mathfrak{q} + i.$$

Dieser zufolge wird

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P(\mathfrak{q} + i)^2 = \Sigma P \mathfrak{q}^2 + 2i\, \Sigma P \mathfrak{q} + i^2 \Sigma P$$

oder, da 𝔈 eine durch den Schwerpunkt gehende Ebene, also $\Sigma P \mathfrak{q} = o$ ist,

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P \mathfrak{q}^2 + i^2 \Sigma P,$$

woraus im Zusammenhalte mit obigen beiden Gleichungen folgt

$$a^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2.$$

Für eine Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt O auf der anderen Seite des Schwerpunktes S liegt, erhält man die nämliche Formel; daraus folgt, dass die Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte in einer durch den Schwerpunkt des Kräftesystems gehenden Geraden liegen, symmetrisch um diesen Schwerpunkt angeordnet sind; d. h. je zwei, deren Mittelpunkte zu beiden Seiten gleichweit vom Schwerpunkt entfernt liegen, sind congruent.

Ist der Halbdurchmesser $\mathfrak{a}$ der Centralfläche, welcher auf der durch den Schwerpunkt gehenden Linie liegt, reell, also $\mathfrak{a}^2$ positiv, so sind alle Halbmesser a der Trägheitsflächen auch reell und stets grösser als $\mathfrak{a}$. Sämmtliche Trägheitsflächen sind folglich mit der Centralfläche gleicher Art und schliessen den Schwerpunkt in den Raum ein, in welchem ihr Mittelpunkt liegt.

Ist aber $\mathfrak{a}$ imaginär, $\mathfrak{a}^2$ negativ, die Centralfläche also jedenfalls ein Doppelhyperboloid, so sind die Trägheitsflächen, deren Mittelpunkt O nahe am Schwerpunkt liegt, zunächst noch gleicher Art mit der Centralfläche. Diejenige Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt um den absoluten Werth des Halbdurchmessers $\mathfrak{a}$ von dem Schwerpunkt entfernt ist, schrumpft zu einer Ellipse oder Hyperbel

zusammen, congruent mit derjenigen, in welcher die Centralfläche von der Ebene $\mathfrak{E}$ geschnitten wird. Für grössere Entfernungen geht in dem ersten Fall, wo die beiden anderen Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ der Centralfläche reell sind, das Doppelhyperboloid in ein Ellipsoid über, im zweiten Fall aber in ein anderes Doppelhyperboloid, in welchem das einmantelige mit dem zweimanteligen vertauscht ist.

§ 120. **Schwerpunkt der als Kräfte gedachten statischen Momente eines Systems paralleler Kräfte.** — Denken wir uns wieder durch den Schwerpunkt S (Fig. 26 Taf. XI) eines Systems paralleler Kräfte die gerade Linie N N′ gezogen, welche die Centralfläche in den Punkten A und A′ durchschneidet. Solche Durchschnittspunkte erhält man allemal, wenn nur die Linie N N′ in dem Falle, wo die Centralfläche ein Doppelhyperboloid wird, nicht gerade auf dem asymptotischen Kegel liegt. $\mathfrak{E}$ sei die zur Linie N N′ conjugirte Ebene in der Centralfläche, E eine ihr parallele durch einen beliebigen Punkt O der Linie N N′ und also in der Trägheitsfläche mit dem Mittelpunkt O ebenfalls der Linie N N′ conjugirt. Dann liegt der Schwerpunkt der statischen Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Ebene E, wenn diese statischen Momente als Parallelkräfte in den Angriffspunkten der gegebenen wirken gedacht werden, in der Linie N N′ (§ 115), und unsere Aufgabe soll nun die sein, seinen Ort in derselben zu bestimmen. Nennen wir zu diesem Behufe q die Entfernungen der Angriffspunkte von der Ebene E, gemessen in der Richtung der Linie N N′ und positiv gerechnet, wenn die betr. Punkte auf derjenigen Seite der Ebene E liegen, auf welcher der Schwerpunkt S liegt; dann ist die Entfernung S O dieses letzteren von der Ebene E, die wir mit i bezeichnen wollen, als wesentlich positive Grösse zu betrachten. Mit $\mathfrak{q}$ wollen wir die Entfernungen der Angriffspunkte von der Ebene $\mathfrak{E}$ bezeichnen, voraussetzend, dass sie ebenfalls in der Richtung der Linie N N′ gemessen und in demselben Sinne wie die q positiv genommen werden. Dann ist stets

$$q = \mathfrak{q} + i,$$

und die Trägheitsmomente der Kräfte bezüglich der Ebenen E und $\mathfrak{E}$ stehen in der einfachen Beziehung zu einander, dass

$$\Sigma P q^2 = \Sigma P (\mathfrak{q} + i)^2 = \Sigma P \mathfrak{q}^2 + i^2 \Sigma P$$

oder, wenn der Halbdurchmesser S A = S A′ der Centralfläche mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet wird,

$$\Sigma P q^2 = (\mathfrak{a}^2 + i^2)\, \Sigma P.$$

Sei nun m die Entfernung des Schwerpunktes M der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Ebene E von dieser letzteren, und $\mathfrak{m}$ seine Entfernung von der Ebene $\mathfrak{E}$, beide in demselben Sinne positiv oder negativ gerechnet wie die q und $\mathfrak{q}$, dann ist wieder

$$m = \mathfrak{m} + i$$

und nach dem bekannten Momentensatze (§ 73)

$$m\, \Sigma P q = \Sigma P q^2.$$

Aber auch die Summe der Momente Pq der Kräfte P in Bezug auf die Ebene E ist gleich dem Product aus der Entfernung i des Schwerpunktes S dieser Kräfte von derselben Ebene in die algebraische Summe der Kräfte, nämlich

$$\Sigma P q = i\, \Sigma P;$$

und dies oben berücksichtigt gibt

$$m\, i\, \Sigma P = \Sigma P q^2 = (\mathfrak{a}^2 + i^2)\, \Sigma P,$$

woraus

$$m\, i = \mathfrak{a}^2 + i^2,$$

und folglich

$$(\mathfrak{m} + i)\, i = \mathfrak{a}^2 + i^2$$

oder einfacher

$$\mathfrak{m}\, i = \mathfrak{a}^2.$$

Ist nun $\mathfrak{a}^2$ positiv, was allemal stattfindet, wenn die Centralfläche ein Ellipsoid ist, so wird $\mathfrak{m}$ jedenfalls positiv, und man hat es von S aus auf N N′ nach derjenigen Seite zu tragen, wo der

Punkt O nicht liegt, um den gesuchten Schwerpunkt der Momente, M, zu erhalten. Denkt man sich dann zur Ebene E eine parallele Ebene E', die mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt S liegt, und die wir kurz die Symmetralebene zu E nennen wollen, so ist vermöge der obigen Relation M der Pol der Ebene E' in der Centralfläche, und zwar in dem Falle, wo letztere ein Doppelhyperboloid ist, in demjenigen von den beiden Hyperboloiden, das von NN' geschnitten wird. Ist aber $\mathfrak{a}^2$ negativ, AA' also eigentlich ein imaginärer Durchmesser, dann wird m aus obiger Relation auch negativ und ist folglich von S aus auf NN' nach derjenigen Seite hin zu tragen, wo O liegt; es ist also der Schwerpunkt —M der Momente in Bezug auf die Ebene E der Pol dieser Ebene selbst, und zwar in demjenigen Hyperboloid der Centralfläche, die jetzt nur ein Doppelhyperboloid sein kann, welches von NN' wirklich in den Punkten A und A' geschnitten wird. Uebersichtlicher ist es, auch hier auf die Symmetralebene E' der Ebene E überzugehen; dann ist —M der Pol der Ebene E' in dem conjugirten Hyperboloid, das von NN' nicht geschnitten wird, in welchem also AA' wirklich imaginärer Durchmesser ist. Daraus folgt der Satz:

> Wenn man sich die statischen Momente der Kräfte eines gegebenen Parallel-Kräftesystems in Bezug auf eine Ebene E wieder als parallele Kräfte in den Angriffspunkten der gegebenen wirken denkt, dann ist ihr Schwerpunkt der Pol derjenigen Ebene E' in der Centralfläche, die zur Ebene E parallel ist und mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt des Kräftesystems liegt oder der Antipol der Ebene E.

In dem Falle, wo die Centralfläche ein Doppelhyperboloid ist, hat man zu beachten, ob derjenige Durchmesser desselben, welcher der Ebene E conjugirt ist, reell oder imaginär wird, d. h. ob das Quadrat des Schwungradius der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Ebene $\mathfrak{E}$, die parallel zu E durch den Schwerpunkt des Kräftesystems geht, positiv oder negativ ist. In jedem Fall ist der Schwerpunkt der Momente der Pol der Symmetralebene E' in demjenigen von den beiden Hyperboloiden, aus denen das Doppelhyperboloid besteht, für welches jener Durchmesser reell, bezw. imaginär ist.

§ 121. Besonderer Fall: Parallele Kräfte, deren Angriffspunkte in einer Ebene liegen. — Die Betrachtungen, welche wir in den beiden vorhergehenden Nummern anstellten, sind leicht auf den Fall zu übertragen, wo die Angriffspunkte sämmtlicher parallelen Kräfte in einer Ebene liegen, und folglich die Trägheitsflächen in Curven, die Centralflächen in die sog. Centralcurven übergehen. Für jede in dieser Ebene liegende Axe, die durch den Schwerpunkt der Kräfte hindurchgeht, ist dann die Summe der statischen Momente der Kräfte Null. Der zu jener Axe conjugirte Durchmesser der Centralcurve muss also so gefunden werden, dass man die Kräfte in zwei Gruppen theilt und den Schwerpunkt der als Kräfte gedachten statischen Momente jeder Gruppe sucht. Die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte ist, der Richtung nach, jener Axe in der Centralcurve conjugirt.

Hieraus folgt, dass in allen Trägheitscurven, deren Mittelpunkte auf einer Linie liegen, welche durch den Schwerpunkt der Kräfte in der Ebene der Angriffspunkte derselben gezogen ist, die jener Linie conjugirten Durchmesser parallel und von gleicher Grösse sind. Alle diese Trägheitscurven, einschliesslich der Centralcurve, werden daher von zwei Linien berührt, die parallel zu derjenigen Geraden sind, welche ihre Mittelpunkte enthält, und beiderseits gleichweit von derselben entfernt liegen. Die anderen Durchmesser, welche in der durch den Schwerpunkt der Kräfte gehenden Geraden selbst liegen, stehen in einfacher Beziehung zu einander. Ist $\mathfrak{a}$ der halbe Durchmesser dieser Art in der Centralcurve, a der in einer beliebigen Trägheitscurve, deren Mittelpunkt in der Entfernung i vom Kräfteschwerpunkt liegt, so ist

$$a^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2.$$

Die Trägheitscurven, deren Mittelpunkte in irgend einer durch den Schwerpunkt der Kräfte gehenden geraden Linie liegen, sind folglich wieder um jenen Schwerpunkt symmetrisch angeordnet;

zwei, deren Mittelpunkte beiderseits gleich weit vom Schwerpunkt entfernt liegen, sind congruent. Wenn der Halbdurchmesser $\mathfrak{a}$ in der Centralcurve reell ist, $\mathfrak{a}^2$ also positiv, so ist a^2 auch stets positiv und grösser als $\mathfrak{a}$. Alle die in Rede stehenden Trägheitscurven sind also gleicher Art wie die Centralcurve und schliessen den Schwerpunkt ein. Ist aber a^2 negativ, die Centralcurve also jedenfalls eine Hyperbel, dann sind die Trägheitscurven, deren Mittelpunkte noch eine kleine Entfernung i vom Kräfteschwerpunkt haben, kleiner als die Strecke $\mathfrak{a}$, auch noch von gleicher Art wie die Centralcurve, also Hyperbeln. Für eine Entfernung $i = \mathfrak{a}$ reducirt sich die Trägheitscurve auf eine gerade Linie, die dem zur Linie der Mittelpunkte conjugirten Durchmesser in der Centralcurve gleich und parallel ist. Und für noch grössere Entfernungen i gehen die Trägheitshyperbeln in Ellipsen über.

Der Schwerpunkt der als Kräfte in den gegebenen Angriffspunkten wirken gedachten statischen Momente der Kräfte in Bezug auf irgend eine in der Ebene ihrer Angriffspunkte gezogene Axe ist in der Centralcurve der Pol einer Linie, welche parallel jener Axe in gleicher Entfernung vom Kräfteschwerpunkt wie sie, aber auf der entgegengesetzten Seite desselben gezogen wird, oder ihr Antipol. In dem Falle, wo die Centralcurve eine Doppelhyperbel ist, hat man zu beachten, ob derjenige ihrer Durchmesser, welcher der Richtung der Momentenaxe conjugirt ist, reell oder imaginär wird. In jedem Falle ist der Schwerpunkt der statischen Momente der Kräfte der Pol einer zur Momentenaxe symmetrisch gelegenen Linie in derjenigen von den beiden Hyperbeln, für welche jener Durchmesser reell oder imaginär wird.

§ 122. Fälle, wo conjugirte Richtungen und Stellungen in den Trägheitsflächen unmittelbar angegeben werden können. — Es gibt einzelne besondere Fälle, in denen conjugirte Richtungen und Stellungen in den Trägheitsflächen unmittelbar angegeben werden können, so dass nur noch die Grösse der betr. Halbdurchmesser zu bestimmen bleibt. Wir wollen einige der wichtigsten dieser Fälle hier anführen.

1. Die Kräfte und ihre Angriffspunkte seien so gegeben, dass letztere paarweise durch parallele Linien verbunden werden können, und dass die Schwerpunkte der Kräftepaare, die an den Enden jener Parallelinien wirken, sämmtlich in einer und derselben Ebene E liegen. Dann sind die Richtungen der Parallellinien und die Stellung dieser Ebene E in allen denjenigen Trägsheitsflächen conjugirt, deren Mittelpunkte auf der durch den Schwerpunkt des ganzen Kräftesystems gezogenen Parallelen zu jenen Verbindungslinien liegen.

Dies ist leicht zu beweisen. Für jedes der obigen Kräftepaare ist die Summe der statischen Momente bezüglich der Ebene E Null. Diese statischen Momente, als Kräfte an den gegebenen Angriffspunkten angebracht, bilden folglich je ein Paar paralleler und entgegengesetzt gerichteter, gleicher Kräfte, deren Momentensumme bezüglich jeder zu den Verbindungslinien der Angriffspunkte parallelen Ebene Null ist. Dies ist folglich auch für alle Kräfte des Systems der Fall und deshalb ist die Richtung jener Verbindungslinie der Ebene E in der Centralfläche sowohl, als in jeder Trägheitsfläche, deren Mittelpunkt die oben bezeichnete Lage hat, conjugirt.

2. Wenn die gegebenen Kräfte so gruppirt werden können, dass die Angriffspunkte der zu einer Gruppe gehörigen Kräfte in parallelen Ebenen und die Schwerpunkte der Gruppen in einer und der nämlichen geraden Linie MM liegen, so ist diese gerade Linie der Stellung der Parallelebenen conjugirt in der Centralfläche sowohl, als in den Trägheitsflächen, welche ihren Mittelpunkt auf ihr liegen haben.

Denn nimmt man irgend eine jenen Parallelebenen parallele Ebene E als Momentenebene, so sind die Angriffspunkte der Kräfte innerhalb jeder der obigen Gruppen gleichweit von ihr entfernt. Deshalb sind die statischen Momente der Kräfte diesen selbst proportional; werden sie also an den Angriffspunkten der letzteren Kräfte angebracht, so fällt ihr Schwerpunkt mit dem der Kräfte zusammen, also in die Linie MM. Dies gilt für alle Gruppen und desswegen liegt der Schwerpunkt

der statischen Momente des ganzen Kräftesystems bezüglich der Ebene E ebenfalls in der Linie MM, in welcher auch der Schwerpunkt des Kräftesystems selbst liegt. Die Linie MM ist folglich der Stellung der Ebene E und damit auch der jener Parallelebenen conjugirt in der Centralfläche und in all den Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte auf MM liegen.

3. Wenn die gegebenen Kräfte so gruppirt werden können, dass die Mittelpunkte der Centralflächen der einzelnen Gruppen auf einer geraden Linie MM liegen, und die zu dieser Linie conjugirten Ebenen in den Centralflächen untereinander parallel sind, dann ist auch in der Centralfläche des ganzen Systems die Linie MM der Stellung jener Parallelebenen conjugirt.

Denn für irgend eine, zu jener Ebene parallele Momentenebene E liegt der Schwerpunkt der statischen Momente der innerhalb einer jeden Gruppe enthaltenen Kräfte auf der Linie MM. Folglich liegt der Schwerpunkt der statischen Momente des ganzen Systems bezüglich derselben Ebene gleichfalls auf der Linie MM, auf welcher auch der Schwerpunkt der Kräfte selbst liegt. Diese ist desshalb der Ebene E conjugirt in allen Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte auf ihr liegen, und in der Centralfläche.

Der vorige Satz ist eigentlich nur ein specieller Fall des eben bewiesenen; die Centralflächen reduciren sich dort auf Centralcurven in der Ebene der Angriffspunkte der Gruppen. Für die beiden Fälle in Nr. 2 und 3 lässt sich nun noch folgender Satz aufstellen:

4. Wenn im Falle der Nr. 2 je zwei conjugirte Durchmesser der Centralcurven in allen Gruppen parallel laufen, oder wenn im Falle der Nr. 3 die parallelen, der Linie MM in den einzelnen Centralflächen conjugirten Ebenen zwei conjugirte Durchmesser dieser Centralflächen enthalten, die in allen Gruppen die nämlichen Richtungen haben, so gibt es auch von der Centralfläche des ganzen Systems in der zur Linie MM conjugirten Ebene zwei conjugirte Durchmesser, die jenen parallel sind.

Denn denkt man sich durch die eine Reihe der parallelen Durchmesser der Centralcurven oder -Flächen der Gruppen eine Ebene E′ gelegt, so schneidet diese die in der Centralfläche des ganzen Systems zur Linie MM conjugirte Ebene in einer zu jenen Durchmessern parallelen Linie M′M′. Wenn dann die Kräfte jeder Gruppe in beliebige zwei Theile getheilt werden, so ist die Verbindungslinie der Schwerpunkte der, bezüglich jener Ebene E′ genommenen statischen Momente je zweier solcher zusammengehöriger Theile einer Gruppe der Ebene E′, bezw. (im Falle der Nr. 2) dem in ihr liegenden Durchmesser, in der Centralfläche oder -Curve der Gruppe conjugirt. Diese Verbindungslinien, an deren Endpunkten man sich je zwei gleiche und parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte (oder eigentlich statische Momente) wirken zu denken hat, sind aber, der Voraussetzung gemäss, alle parallel, und daher ist die Gesammtsumme der statischen Momente jener als Kräfte gedachten Momente Null bezüglich jeder zu den Verbindungslinien parallelen Ebene. Die Richtung dieser Verbindungslinien ist folglich auch in der Centralfläche des ganzen Systems der Ebene E′ und damit der Linie M′M′ conjugirt.

§ 123. Fälle, wo conjugirte Richtungen in den Trägheitscurven unmittelbar angegeben werden können. — Die Uebertragung der Sätze im vorigen § auf den speciellen Fall, wo die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte in einer Ebene liegen, und wo, wie wir kurz sagen wollen, die Kräfte ein ebenes System bilden, ist sehr einfach. Wir begnügen uns die Resultate hiefür anzuführen, und überlassen es dem Leser, die Beweise den obigen allgemeinen nachzubilden.

1. Wenn in einem ebenen System paralleler Kräfte diese paarweise so gruppirt werden können, dass die Verbindungslinien der Angriffspunkte der Gruppen alle parallel laufen, und dass die Schwerpunkte der Kräftepaare, die an den Enden jener Parallellinien wirken, sämmtlich in einer und derselben geraden Linie liegen, so ist diese der Richtung jener parallelen Verbindungslinien in der Centralcurve des Systems und in allen Trägheitscurven desselben, deren Mittelpunkte auf ihr liegen, conjugirt.

2. Wenn die Kräfte des ebenen Systems so gruppirt werden können, dass die Angriffspunkte der zu einer Gruppe gehörigen Kräfte in parallelen Linien und die Schwerpunkte der Gruppen in einer und derselben Geraden liegen, so ist letztere der Richtung jener Parallellinien conjugirt in der Centralcurve sowohl als auch in den Trägheitscurven, deren Mittelpunkte auf ihr liegen.

3. Wenn die Kräfte eines ebenen Systems so gruppirt werden können, dass die Mittelpunkte der Centralcurven der einzelnen Gruppen auf einer geraden Linie liegen, und die zu dieser Linie conjugirten Durchmesser in den einzelnen Centralcurven untereinander parallel sind, dann ist auch in der Centralcurve des ganzen Systems die Linie MM der Richtung jener parallelen Durchmesser conjugirt.

§ 124. Specieller Fall, wo die unmittelbar angebbaren conjugirten Richtungen und Stellungen senkrecht auf einander stehen. — In allen Fällen der beiden vorhergehenden Paragraphen, wo die conjugirten Linien und Ebenen senkrecht auf einander stehen, hat man es mit den Hauptaxen und den ihnen conjugirten Ebenen der betreffenden Central- und Trägheitsflächen, bezw. -Curven zu thun.

§ 125. Construction der Centralfläche eines Systems paralleler Kräfte aus den bekannten Centralflächen der Gruppen, in welche jenes System zerlegt werden kann. — Es bleibt nun noch zu erörtern, wie die Centralfläche F_0 eines Systems paralleler Kräfte gefunden werden kann, wenn die Centralflächen F', F'', F'''... der Gruppen, in welche das Kräftesystem zerlegt wurde, bekannt sind, und diese letzteren eine ganz beliebige Lage und Gestalt haben.

In Fig. 27 Taf. XI mögen F', F'', F'''... die Centralflächen der Gruppen mit den Mittelpunkten S', S'', S'''..., den Schwerpunkten der Kräfte in diesen Gruppen, vorstellen, welche jedoch nicht alle in einer Ebene zu liegen brauchen, wie es nach der Zeichnung scheinen könnte. Der punktirt gezeichnete Theil der Fläche F'' sei derjenige, welcher mittelst der an ihn gelegten Tangentialebenen die Schwungradien gibt, deren Quadrat negativ ist. Die Kräfte der ersten Gruppe sollen mit P' (nämlich P'_1, P'_2...) bezeichnet werden, die der zweiten Gruppe mit P'', der dritten mit P''' u. s. w. Denkt man sich dann in den Mittelpunkten S', S'', S'''... die parallelen Kräfte $P'_0 = \Sigma P'$; $P''_0 = \Sigma P''$; $P'''_0 = \Sigma P'''$ etc. wirken, so kann der Schwerpunkt S_0 derselben auf die bekannte Weise gefunden werden; er ist der Schwerpunkt des ganzen Kräftesystems und Mittelpunkt der Centralfläche desselben.

Sei nun E irgend eine Ebene, so ist der Schwerpunkt M' der statischen Momente der Kräfte P' in Bezug auf diese Ebene der Pol einer mit E symmetrisch zum Mittelpunkt S' liegenden Ebene in der Centralfläche F'. Er liegt folglich in dem zu E conjugirten Durchmesser $A'A'$ der letzteren Fläche und zwar so, dass

$$\overline{S'M'} = \frac{\overline{S'A'}^2}{\overline{S'O'}}$$

oder, wenn $S'M'$ mit $\mathfrak{m}'$, $S'A'$ mit $\mathfrak{a}'$ und $S'O'$ mit $\mathfrak{i}'$ bezeichnet wird, dass

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{a}'^2}{\mathfrak{i}'}$$

ist (s. § 120). In ganz ähnlicher Weise findet man die Schwerpunkte M'', M'''... der statischen Momente der Kräfte P'', P'''... bezüglich der Ebene E.

In diesen Schwerpunkten hat man sich die Summe der Momente der Kräfte P', P'', P'''... bezüglich der Ebene E wirkend zu denken, also die Momente der in S', S'', S'''... wirkenden Kräftesummen $\Sigma P'$, $\Sigma P''$, $\Sigma P'''$... Diese letzteren Momente hat man aber bereits construirt, indem man den Schwerpunkt S_0 aus den Schwerpunkten S', S'', S'''... der Gruppen suchte, wenn man nur als Ebene E eine der Projectionsebenen wählt, welche man zu obiger Construction nöthig hatte. Sucht man nun den Mittelpunkt (Schwerpunkt) M_0 jener in M', M'', M'''... thätigen Kräfte auf bekannte

Weise, dann ist die Verbindungslinie desselben mit dem Kräfte-Schwerpunkt S_0 des ganzen Systems der Stellung der Ebene E in der Centralfläche conjugirt. Sie ist der Durchmesser, welcher in der Centralfläche der Ebene 𝔈 conjugirt ist, die parallel zu E durch S_0 gelegt wurde. Die Länge dieses Durchmessers ist dann leicht zu finden. Seine von S_0 gleich weit entfernten Endpunkte A_0, A_0 müssen den Momenten-Schwerpunkt M_0 harmonisch entweder von dem Durchgangspunkt O_0 des Durchmessers durch die Ebene E trennen, oder von dem Durchgangspunkt O_0' desselben durch eine Ebene E', welche parallel zu E ist und symmetrisch mit ihr gegen den Schwerpunkt S_0 liegt, je nachdem M_0 und O_0 auf einerlei Seite, oder auf verschiedenen Seiten der Ebene 𝔈 liegen. Auf jeden Fall ist

$$\overline{S_0 A_0}^2 = \overline{S_0 M_0} \times \overline{O_0 S_0},$$

wobei $\overline{S_0 A_0}^2$ positiv oder negativ, der Halbdurchmesser $S_0 A_0$ also reell oder imaginär wird, je nachdem O_0 und M_0 auf verschiedene oder auf einerlei Seite der Ebene 𝔈 fallen.

Auf ganz gleiche Weise kann man für eine zweite Ebene e, die parallel zum eben gefundenen Durchmesser $A_0 A_0$ ist, den ihr conjugirten Durchmesser in der Centralfläche finden, der Richtung und Grösse nach. Er muss in der Ebene 𝔈 liegen. Denkt man sich endlich durch S_0 parallel zur Ebene e eine Ebene 𝔢 gelegt, so schneidet diese die Ebene 𝔈 in einer geraden Linie, welche mit den beiden schon gefundenen drei conjugirte Durchmesser der Centralfläche bildet. Diese ist also bestimmt, wenn noch auf irgend eine der schon bekannten Arten die Grösse des dritten Durchmessers gefunden wird.

§ 126. Construction des Trägheitsmomentes eines Systems paralleler Kräfte in Bezug auf eine beliebige Ebene, wenn die Centralflächen der Gruppen bekannt sind, in welche jene Kräfte getheilt werden können. — In den Anwendungen kommt es häufig vor, dass der Schwerpunkt S_0 eines Kräftesystems, wie wir es im vorigen § behandelt haben, schon bekannt ist, eben so die Richtung, welche in der Centralfläche des ganzen Systems der durch den Schwerpunkt S_0 gelegten Ebene 𝔈 conjugirt ist, so dass nur noch erübrigt, die Länge des in jener Richtung liegenden, der Ebene 𝔈 conjugirten Durchmessers, also das Trägheitsmoment bezüglich der Ebene 𝔈 und für jene Richtung zu finden. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die letztbezeichnete Aufgabe einfacher durchführen, als es im vorigen § an den betreffenden Stellen angedeutet wurde.

Seien in Fig. 27 Taf. XI F', F'', F'''... wieder die Centralflächen der Gruppen P', P'', P'''..., in die das gegebene Kräftesystem zerlegt werden kann, und stellen wir uns die Aufgabe, das Trägheitsmoment des letzteren in Bezug auf eine beliebige Ebene E zu finden. Dann erhalten wir zunächst das Trägheitsmoment der Gruppe P', wenn wir irgend eine Trägheitsfläche derselben construiren, deren Mittelpunkt in E liegt. Die Entfernung der zu E parallelen Tangentialebenen an diese Fläche von E ist der Schwungradius des gesuchten Trägheitsmomentes. Unter allen Trägheitsflächen der Gruppe P' können wir aber diejenige am leichtesten finden, deren Mittelpunkt im Durchschnitt O' des zu E conjugirten Durchmessers A'A' der Centralfläche F' mit der Ebene E liegt (s. § 119). Zu jedem Paar conjugirter in der Ebene E liegender Durchmesser der Trägheitsfläche findet sich ein Paar gleicher und paralleler in der Centralfläche F' und der dritte, zu E conjugirte Halbdurchmesser O'N' hat nach § 119 eine solche Länge a', dass

$$a'^2 = \mathfrak{a}'^2 + \mathfrak{i}'^2$$

ist, wenn, wie im vorigen §, $\mathfrak{a}'$ den Halbdurchmesser S'A' der Centralfläche und $\mathfrak{i}'$ die Entfernung S'O' des Mittelpunktes der Trägheitsfläche vom Mittelpunkte der Centralfläche bedeutet. In derselben Weise findet man die Endpunkte N'', N'''... der zu E conjugirten Halbdurchmesser der Trägheitsflächen der Gruppen P'', P'''... mit den Mittelpunkten O'', O'''... Bei der zweiten Gruppe hat man zu beachten, dass der Durchmesser A''A'' imaginär, also $\mathfrak{a}''^2$ negativ ist. Bezeichnen nun k', k'', k'''... die in der vorgeschriebenen Richtung gemessenen Entfernungen der Punkte N', N'', N'''... von der Momentenebene E, so sind

$$k'^2 \Sigma P', \; k''^2 \Sigma P'', \; k'''^2 \Sigma P''' \ldots$$

die Trägheitsmomente der einzelnen Kräftegruppen und folglich

$$k'^2 \Sigma P' + k''^2 \Sigma P'' + k'''^2 \Sigma P''' + \dots$$

das gesuchte Trägheitsmoment des ganzen Systems. Um dasselbe zu erhalten, hat man sich folglich in den Punkten N', N'', N'''... die Kräftesummen $\Sigma P'$, $\Sigma P''$, $\Sigma P'''$... wirken zu denken und für dieselben das Trägheitsmoment bezüglich der Ebene E ganz so zu construiren, wie es im § 111 für Einzelkräfte gezeigt worden ist. Es ist dabei gleichgültig, an welchem der beiden Endpunkte des zu E conjugirten Durchmessers der betr. Trägheitsfläche die obigen Kräftesummen angebracht werden; denn das Trägheitsmoment einer Kraft ist unabhängig von dem Vorzeichen der Entfernung ihres Angriffspunktes von der Momentenebene; aber die Kräftesumme selbst muss in dem ihrem eigenen Vorzeichen entsprechenden Sinne oder im entgegengesetzten genommen werden, je nachdem der Durchmesser, an dessen Ende sie wirkt, reell oder imaginär ist, je nachdem also das Vorzeichen von a'^2, a''^2, a'''^2... nach obiger Formel positiv oder negativ wird.

Bei dem eben gezeigten Verfahren für die Construction des Trägheitsmomentes sind in der willkürlich anzunehmenden Projectionsebene zwei Kräfte- und Seilpolygone zu construiren, wie in dem Verfahren des vorigen § auch. Aber während dort das eine Seilpolygon zwischen den Parallelen zu ziehen ist, welche durch die Projectionen der Punkte S', S'', S'''... auf die Projectionsebene gelegt werden, das andere zwischen den Parallelen durch die Projectionen der Punkte M', M'', M'''..., können hier beide Seilpolygone zwischen denselben Parallelen, welche durch die Projectionen der Punkte N', N'', N'''... hindurchgehen, construirt werden; und das vereinfacht natürlich die Construction.

Wie sich die Betrachtungen dieses und des vorigen § modificiren und vereinfachen, wenn sämmtliche Angriffspunkte der gegebenen Kräfte in einer Ebene liegen, ist leicht zu übersehen. Ein Beispiel für einen practischen Fall der letzteren Art werden wir im § 139 durchführen.

X. Abschnitt.

System paralleler Kräfte, deren Intensitäten den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Ebene proportional sind. — Centralellipsoid, Centralellipse und Kern von Körpern und ebenen Figuren (Querschnitten).

§ 127. Mittelpunkt und statisches Moment, dann Trägheitsfläche und Centralfläche, Trägheitscurve und Centralcurve von Parallelkräften, welche den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Neutral-Ebene oder -Axe proportional sind. — Das im vorhergehenden Abschnitt Vorgetragene findet seine praktische Verwendung hauptsächlich für Kräfte, deren Intensitäten den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Ebene, die wir Neutralebene nennen wollen, proportional sind. Bezeichnen wir mit $p_1, p_2, p_3 \ldots$ parallele Kräfte, die an Angriffspunkten wirken, deren in bestimmter Richtung gemessene Entfernungen von der Neutralebene E bezw. $e_1, e_2, e_3 \ldots$ sein mögen, und sind $C_1, C_2, C_3 \ldots$ Constante der Art, dass

$$p_1 = C_1 e_1,\ p_2 = C_2 e_2,\ p_3 = C_3 e_3 \ldots,$$

so sind die Kräfte p nichts anderes als die bezüglich der Neutralebene genommenen statischen Momente der Constanten C, welche man sich an den gegebenen Angriffspunkten als Kräfte wirken denkt. Die statischen Momente $p_1 e_1, p_2 e_2, p_3 e_3 \ldots$ der Kräfte p bezüglich der Neutralebene sind die Trägheitsmomente $C_1 e_1^2, C_2 e_2^2, C_3 e_3^2 \ldots$ derselben Constanten. Der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p endlich, d. h. ihr Mittelpunkt oder Schwerpunkt, ist der Schwerpunkt der Momente $C_1 e_1, C_2 e_2 \ldots$, die an den gegebenen Angriffspunkten wirken. Dabei hat man den Entfernungen e das positive oder negative Vorzeichen zu geben, je nachdem die Angriffspunkte auf der einen oder anderen Seite der Neutralebene liegen; und hiernach richten sich natürlich auch die Vorzeichen der Kräfte p. Alles also, was im vorhergehenden Paragraphen gesagt wurde, lässt sich unmittelbar auf das obige System paralleler Kräfte p anwenden, wenn man nur an Stelle der Kräfte P die Constanten C setzt, ferner an Stelle der statischen Momente Pq der Kräfte P die Kräfte p und endlich an Stelle der Trägheitsmomente Pq^2 die statischen Momente pe der Kräfte p bezüglich der Neutralebene. Der Schwerpunkt der statischen Momente Pq ist der Mittel- oder Schwerpunkt der Kräfte p.

Wenn man das Gesammt-Trägheitsmoment der Constanten C oder das gesammte statische Moment der Kräfte p durch die Summe der Constanten selbst dividirt, so ist der Quotient das Quadrat einer Grösse, die wir Schwungradius des Kräftesystems für die Neutralebene E nennen. Zwei Ebenen E′, E″ zu beiden Seiten der Neutralebene E in einer Entfernung gleich jenem Schwungradius gezeichnet und zwar für alle Lagen der Neutralebene, die sie annimmt, indem sie sich um einen festen Punkt O dreht, umhüllen eine Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkt, dem Punkt O. Diese Fläche heisst im Allgemeinen Trägheitsfläche des Kräftesystems und Centralfläche dann, wenn der feste Punkt O, ihr Mittelpunkt, der Schwerpunkt S der Constanten C ist.

Für irgend eine Lage der Neutralebene E ist der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p der Pol, welcher in der Centralfläche einer Ebene E' zugehört, die der Neutralebene parallel ist und symmetrisch mit ihr gegen den Schwerpunkt S liegt. Für alle Lagen der Neutralebene, wo sie durch den Schwerpunkt S der Constanten selbst geht, wird die Summe der Kräfte p Null und fällt ihr Angriffspunkt in unendliche Entfernung.

Für Kräfte, deren Angriffspunkte alle in einer Ebene liegen, tritt an Stelle der Neutralebene eine neutrale Axe in der Ebene der Angriffspunkte. Die Trägheitsflächen und die Centralfläche gehen in Curven zweiten Grades mit einem Mittelpunkt über, die entsprechend Trägheits- und Centralcurven heissen. Der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte P ist der Pol, welcher in der Centralcurve einer Linie zugehört, die parallel zur Neutralaxe ist und mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt der Constanten C, den Mittelpunkt der Centralcurve, liegt.

§ 128. Statisches Moment, Trägheitsmoment und Schwungradius, dann Trägheits- und Central-Ellipsoid, Trägheits- und Central-Ellipse von Körpern und bezw. Querschnitten. — In der Regel greifen die im vorigen § behandelten Kräfte p an allen Molecülen oder Elementen eines Körpers, bezw. einer Fläche an, und sind dann nicht bloss den Entfernungen ihrer Angriffspunkte von einer Neutralebene bezw. Neutralaxe proportional, sondern auch den Volumen- oder Flächenelementen $v_1, v_2, v_3 \dots$ bezw. $f_1, f_2, f_3 \dots$, welche ihre Angriffspunkte umschliessen oder als diese selbst genommen werden können. In diesem Falle hat man die Constanten

$$C_1, C_2, C_3 \dots$$

einfach den Producten

$$A v_1, A v_2, A v_3 \dots$$

oder

$$A f_1, A f_2, A f_3 \dots$$

gleichzusetzen, worin A eine absolute Constante bedeutet. Die Summe der Constanten C wird dann

$$A \Sigma v \text{ oder } A V$$

bezw.

$$A \Sigma f \text{ oder } A F,$$

wo V den Voluminhalt des ganzen Körpers, F den Inhalt des Querschnitts bezeichnet, an welchen die Kräfte wirken. Diese Kräfte p selbst werden

$$A v_1 e_1, A v_2 e_2, A v_3 e_3 \dots$$

oder

$$A f_1 e_1, A f_2 e_2, A f_3 e_3 \dots$$

und ihre Summe, gleich ihrer Resultante,

$$A \Sigma v e \text{ oder } A \Sigma f e.$$

Der Schwerpunkt S der Constanten C fällt offenbar mit dem des Körpers V oder der Fläche F zusammen. Die statischen Momente der Kräfte p in Bezug auf die Neutralebene bezw. -Axe sind endlich

$$A v_1 e_1^2, A v_2 e_2^2, A v_3 e_3^2 \dots$$

oder

$$A f_1 e_1^2, A f_2 e_2^2, A f_3 e_3^2 \dots$$

und ihre Summe

$$A \Sigma v e^2 \text{ oder } A \Sigma f e^2.$$

Hieraus ist zunächst die Bedeutung der Constanten A leicht zu erkennen: sie ist gleich der Kraft, welche in der Entfernung Eins von der Neutralebene bezw. -Axe an der Volum- bezw. Flächeneinheit thätig ist. Da mit A alle die obigen Grössen einfach proportional sind, so dürfen wir die Constanten C auch *gleich* den Volum- oder Flächeninhalten $v_1, v_2, v_3 \dots$ bezw. $f_1, f_2, f_3 \dots$ setzen; ihre Summe ist dann dem Inhalte des Körpers, V, oder der Fläche, F, gleich und ihr Schwerpunkt wird der Schwerpunkt des Körpers V bezw. der Fläche F. Die Summe der Kräfte p wird

gleich Σve bezw. Σfe, die wir die statischen Momente des Körpers oder bezw. der Fläche bezüglich der Neutralebene oder -Axe nennen. Die Summe der statischen Momente der Kräfte p endlich wird

$$\Sigma v e^2 \text{ bezw. } \Sigma f e^2$$

und heisst das Trägheitsmoment des Körpers bezw. der Fläche in Bezug auf die Neutral-Ebene oder -Axe.

Den Quotienten

$$\frac{\Sigma v e^2}{V} \text{ oder } \frac{\Sigma f e^2}{F}$$

setzen wir wieder dem Quadrat einer Grösse k gleich, die wir den Schwungradius des Körpers oder der Fläche bezüglich der Neutralebene oder -Axe nennen. Werden in Entfernungen gleich dieser Grösse k zu beiden Seiten der Neutralebene E oder -Axe N zwei denselben parallele Ebenen E′ und E″ bezw. Linien N′ und N″ gezeichnet, und zwar für alle Lagen, welche die Ebene E oder Axe N annehmen kann, indem sie stets durch einen festen Punkt O hindurchgeht, so umhüllen jene Ebenen und bezw. Geraden eine Fläche oder Curve zweiten Grades mit dem Punkte O als Mittelpunkt, welche wir die Trägheitsfläche oder -Curve des Körpers V oder des ebenen Querschnittes F nennen wollen. Sie wird zur Centralfläche (-Curve) des Körpers V (Querschnittes F), wenn ihr Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt S des Körpers (des Querschnittes) zusammenfällt.

In diesen letzteren Beziehungen vereinfachen sich aber die Verhältnisse im vorliegenden Falle wesentlich. Die Constanten $v_1, v_2, v_3 \ldots$ oder $f_1, f_2, f_3 \ldots$ sind als absolute Grössen zu betrachten, bei denen ein Gegensatz der Qualität, also der Vorzeichen nicht denkbar ist. Als parallele Kräfte an den Angriffspunkten wirkend sind sie desshalb alle im gleichen Sinne gerichtet. Die Trägheitsfläche eines Körpers wird also immer ein Ellipsoid, eben so die Centralfläche; und in gleicher Weise sind die Trägheits- und Centralcurven ebener Querschnitte F immer Ellipsen. Wir werden daher in Zukunft nur von Trägheits- und Central-Ellipsoiden bezw. -Ellipsen sprechen.

Kennt man das Centralellipsoid eines Körpers, so ist der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte p, die sich auf eine Neutralebene E beziehen, der Pol, welcher im Centralellipsoid der Symmetralebene E′ von E zugehört. In gleicher Weise ist der Angriffspunkt der Resultante von Kräften p, die in den Elementen eines Querschnittes wirken, und diesen, sowie ihren Entfernungen von einer Neutralaxe N proportional sind, der Pol, welcher in der Centralellipse des Querschnitts einer Geraden N′ zugehört, die zu N parallel ist und symmetrisch mit ihr zum Schwerpunkt des Querschnitts liegt. Wenn die Neutralaxe N durch diesen Schwerpunkt selbst hindurchgeht, so wird die Summe der Kräfte p Null und der Angriffspunkt ihrer Resultante fällt in unendliche Entfernung, d. h. sie bilden ein Gegenpaar. Aehnliches gilt natürlich für die Neutralebene eines Körpers.

Kräfte, deren Angriffspunkte die Elemente einer ebenen Fläche sind, kommen bei gebogenen prismatischen Körpern vor. Nimmt man an, dass ebene Querschnitte eines solchen Körpers auch nach der Biegung eben bleiben und von gleicher Gestalt, dann sind die Spannungen der Fasern, welche von einem solchen Querschnitt getroffen werden, den Flächenelementen desselben und der Entfernung dieser Elemente von einer neutralen Axe proportional. Diese Spannungen sind parallele Kräfte p, welche an dem Querschnitt als Einwirkungen des einen Körpertheils auf den anderen, abgeschnittenen, angebracht werden müssen. Ihre Summe oder Resultante ist gleich dem statischen Moment des Querschnitts in Bezug auf die Neutralaxe, multiplicirt mit einer Constanten A, gleich der Spannung, welche in der Entfernung eins von der neutralen Axe pro Flächeneinheit wirkt. Jene Summe ist also Null, wenn die Neutralaxe durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Dann bilden alle Spannungen ein Gegenpaar. Das statische Moment der Spannungen in Bezug auf die Neutralaxe ist gleich dem Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf dieselbe Axe, multiplicirt mit der nämlichen Constanten A wie oben. Diese Trägheitsmomente können für alle Lagen der

Neutralaxe, in welchen dieselbe durch einen festen Punkt O geht, mittelst der Trägheitsellipse des Querschnitts für den Punkt O auf bekannte Weise gefunden werden. Dreht sich die neutrale Axe um den Schwerpunkt des Querschnitts, so wird die Trägheitsellipse zur Centralellipse.

Für irgend eine neutrale Axe wird der Angriffspunkt der Resultante der Spannungen der Pol einer mit der neutralen symmetrischen Axe in der Centralellipse. Dieser Angriffspunkt fällt also in unendliche Entfernung, wenn die neutrale Axe durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

§ **129. Der Kern eines Körpers.** — In Folge des einfachen geometrischen Zusammenhangs, welcher zwischen der Neutralebene und dem Angriffspunkt der Resultante von Kräften besteht, die auf sie bezogen sind, lassen sich nach bekannten geometrischen Sätzen noch folgende Beziehungen zwischen beiden aufstellen:

1. Wenn die Neutralebene E ihre Stellung so verändert, dass sie immer durch einen fixen Punkt M hindurchgeht (sich um diesen Punkt dreht), so bleibt der Angriffspunkt der auf sie bezogenen Kräfte p eines Körpers auf einer Ebene, welche im Centralellipsoid des Körpers die Polarebene für einen Punkt M′ ist, der mit M symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegt, und um welchen sich gleichzeitig die Ebene E′ dreht, welche in Bezug auf den Schwerpunkt des Körpers zur Neutralebene symmetrisch liegt.

2. Wenn sich die Neutralebene E um eine feste Axe G dreht, so bleibt der Angriffspunkt der Resultante der auf sie bezogenen Kräfte p eines Körpers auf einer geraden Linie. Dieselbe ist in der Ellipse, nach welcher ein zur Axe G paralleler Cylinder das Centralellipsoid des Körpers berührt, die Polare des Punktes, in welchem die Ellipsenebene eine Linie G′ schneidet, welche zur Axe G parallel ist und symmetrisch mit ihr gegen den Schwerpunkt liegt; mit einem Wort, sie ist die Polare der Linie G′.

3. Wenn die Neutralebene den Körper, an welchem die auf sie bezogenen Kräfte p wirken, umhüllt, so dass sie, stets Tangentialebene an dessen Oberfläche bleibend, nie in das Innere desselben eindringt, dann bleibt der Angriffspunkt der Resultante jener Kräfte auf der Oberfläche eines Raumes, welcher der Kern (Centralkern) des Körpers heisst. Für alle Lagen der Neutralebene, in denen sie ganz von dem Körper ausgeschlossen ist, liegt der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte innerhalb des Kerns des Körpers, ausserhalb desselben dagegen, wenn die Neutralebene in den Körper eindringt.

Ein Beispiel möge dies erläutern. Eine Ebene habe die Eigenschaft, dass sie auf die Moleküle eines Körpers, die auf ihrer einen Seite liegen, anziehende Kräfte ausübt, die parallel unter sich und den Massen der Moleküle, sowie den Entfernungen derselben von der Ebene proportional sind, wogegen von ihr aus auf Moleküle, die an ihrer anderen Seite liegen, abstossende Kräfte gleicher Art einwirken mögen. Dann liegt der Angriffspunkt der Mittelkraft aller der an den Molekülen eines Körpers thätigen Kräfte jener Art innerhalb des Kerns dieses Körpers, so lange jene Ebene ganz ausserhalb des Körpers bleibt, und folglich alle an dem Körper thätigen Kräfte einerlei Natur sind, anziehender entweder oder abstossender. Umgekehrt gibt ein Heraustreten des Angriffspunktes aus dem Kern zu erkennen, dass die Ebene in den Körper eindringt und folglich ein Theil der Moleküle desselben von ihr angezogen, ein anderer abgestossen wird.

§ **130. Der Kern eines Querschnitts.** — Die Uebertragung obiger Sätze auf den Fall, wo die Kräfte p an den Elementen einer ebenen Figur, eines Querschnitts, wirken, ist leicht.

1. Wenn sich die Neutralaxe, auf welche die an den Elementen eines Querschnitts thätigen Kräfte p bezogen sind, um einen festen Punkt M dreht, so bleibt der Angriffspunkt der Resultante jener Kräfte auf einer Linie, welche in der Centralellipse des Querschnitts die Polare eines Punktes M′ ist, der mit M symmetrisch gegen den Schwerpunkt des Querschnitts liegt.

2. Wenn die neutrale Axe, auf welche die an den Elementen eines Querschnitts wirkenden Kräfte p bezogen sind, den Querschnitt so umhüllt, dass sie, stets Tangente an ihm bleibend, nie

und weil

$$k^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2,$$

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int y x^2 dx}{\int y dx} - i^2.$$

Nun ist nach der bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes

$$i = \frac{\int y x dx}{\int y dx}$$

und daher

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int y x^2 dx}{\int y dx} - \left(\frac{\int y x dx}{\int y dx}\right)^2.$$

Im Falle, dass die Momentenebene oder -Axe gleich durch den Schwerpunkt gelegt wird, ist $\int y x dx = 0$ und folglich

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int y x^2 dx}{\int y dx}.$$

Für Körper oder Querschnitte von so einfacher Gestalt, wie wir sie oben vorausgesetzt haben, wird man am zweckmässigsten die Längen von Durchmessern auf die eben gezeigte Art durch Rechnung ermitteln und auftragen. Für solche dagegen, welche die obigen Bedingungen der „Einfachheit“ nicht mehr oder nicht mehr vollständig erfüllen, ist das graphische Verfahren wieder vorzuziehen. Man zerlegt sie dann womöglich in Theile von solcher Gestalt, dass man deren Centralellipsoide und bezw. Centralellipsen wie oben finden kann, und construirt dann aus diesen auf die in den §§ 125 und 126 gezeigte Art das Centralellipsoid oder die Centralellipse des ganzen Körpers oder Querschnitts. Ist aber eine Zerlegung der obigen Art nicht mehr möglich, so zerschneidet man durch Parallel-Ebenen oder -Linien in so dünne Platten oder Streifen, dass man dieselben annähernd als Körper oder Flächen von einfacher Gestalt, als Prismen oder Paralleltrapeze, ansehen darf, und verfährt dann weiter, wie unten an einem Beispiele näher erörtert werden soll. Ist einmal das Centralellipsoid oder die Centralellipse gefunden, so ist der Kern des Körpers oder Querschnitts leicht zu erhalten.

Centralellipse und Kern ebener Figuren (Querschnitte).

§ **132. Das Parallelogramm** (Fig. 28 Taf. XI). — In der Centralellipse des Parallelogramms ABCD sind die durch seinen Mittelpunkt O gelegten, zu den Seiten parallelen Linien EF, GH conjugirte Durchmesser. Für die Axe EF und für Entfernungen, die in der Richtung GH gemessen werden, ist

$$\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} a x^2 dx \sin\varphi = \tfrac{1}{12} a b^3 \sin\varphi$$

das Trägheitsmoment des Parallelogramms, vorausgesetzt, dass a und b die Seiten AB und AD desselben bezeichnen und φ den Winkel, den sie mit einander bilden. Das Quadrat des entsprechenden Schwungradius ist also

$$k^2 = \frac{\tfrac{1}{12} a b^3 \sin\varphi}{a b \sin\varphi} = \tfrac{1}{12} b^2,$$

und seine Länge k ist gleich der des Halbdurchmessers der Centralellipse, der in GH liegt. In gleicher Weise wird die Länge des auf EF liegenden Halbdurchmessers als

$$k' = \sqrt{\tfrac{1}{12} a^2}$$

gefunden. Beide können entweder berechnet und aufgetragen werden, wo dann

$$k = 0{,}2887\,b \text{ und } k' = 0{,}2887\,a$$

wird; oder man kann sie construiren, indem man

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}b . \tfrac{1}{6}b} \text{ und } k' = \sqrt{\tfrac{1}{2}a . \tfrac{1}{6}a}$$

setzt und die mittlere geometrische Proportionale zwischen $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{6}b$, bezw. $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{6}a$ zeichnet. Letzteres ist in der Figur mit Hülfe der beiden Halbkreise über BF und BH geschehen.

Durch die beiden conjugirten Durchmesser kk_1, $k'k'_1$ ist die Centralellipse völlig bestimmt. Man kann sie direct aus diesen zeichnen oder zuerst die Hauptaxen auf bekannte Weise finden. Für die Construction des Kerns ist dies jedoch gar nicht nöthig. Denkt man sich die neutrale Axe zuerst mit AB zusammenfallend, so liegt der Angriffspunkt der Resultante aller Kräfte, die am Parallelogramm wirken und auf AB bezogen sind, in dem zu AB conjugirten Durchmesser der Centralellipse so, dass er der Pol der mit AB symmetrisch liegenden Linie CD in jener Ellipse ist; oder es ist

$$\overline{O\gamma} = \frac{k^2}{\overline{OH}} = \frac{\frac{1}{12}b^2}{\frac{1}{2}b} = \tfrac{1}{6}b.$$

Dies ist unmittelbar aufzutragen. In gleicher Weise findet sich für die Lage BC der neutralen Axe der Angriffspunkt δ in dem zu BC conjugirten Durchmesser so, dass

$$\overline{O\delta} = \tfrac{1}{6}a.$$

Eben so sind α und β, die Angriffspunkte für den Fall, dass die neutrale Axe mit CD oder DA zusammenfällt, so gelegen, dass

$$\overline{O\alpha} = \tfrac{1}{6}b \text{ und } \overline{O\beta} = \tfrac{1}{6}a$$

ist. Während sich die neutrale Axe um B dreht, um von der Lage AB in die BC überzugehen, durchläuft der Angriffspunkt der Resultante die gerade Linie $\gamma\delta$, und so überzeugt man sich leicht, dass das Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ der Kern des gegebenen Parallelogramms ist.

Aus diesem Kern kann man sich nun wieder mehrere Punkte der Centralellipse nebst ihren Tangenten auf einfache Weise verschaffen. Die Diagonalen AC und BD sind ebenfalls conjugirte Durchmesser der Centralellipse und $\beta\gamma$ die Polare des Punktes C in derselben, sie muss folglich durch die beiden Durchschnittspunkte c, c_1 der Linie AC mit der Ellipse harmonisch von letzterem Punkt getrennt werden, oder es muss

$$\overline{Oc}^2 = \overline{O\varepsilon} \times \overline{OC}$$

sein. Der Punkt c ist folglich leicht zu construiren. Es ist in der Figur mittelst des über OC beschriebenen Halbkreises geschehen. Die Tangente in ihm an die Centralellipse ist parallel zu $\beta\gamma$. — Aus dem Punkte c sind unmittelbar die mit ihm symmetrisch liegenden c_1, c_2, c_3 nebst ihren zu $\alpha\delta$, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ parallelen Tangenten zu erhalten.

Weil A der Pol der Linie $\alpha\delta$ in der Centralellipse ist, so berühren zwei von ihm an diese gezogene Tangenten die Ellipse in den beiden Punkten d und d_1, in denen sie von $\alpha\delta$ geschnitten wird. Dabei liegen die Punkte d und d_1 so, dass sie die beiden Punkte e und f, in welchen die Polare von den Linien Ac_2 und c_2e geschnitten wird, harmonisch trennen. Von letzteren Linien ist Ac_2 die Verbindungslinie des Pols mit dem Endpunkte des zur Polaren parallelen Durchmessers und c_2e eine durch denselben Endpunkt zur Verbindungslinie des Pols mit dem Mittelpunkt der Ellipse gezogene Parallele. Es ist folglich

$$\overline{\varepsilon_1 d}^2 = \overline{\varepsilon_1 e} \times \overline{\varepsilon_1 f}$$

und kann auf bekannte Weise construirt werden. Die Verbindungslinie A d ist dann Tangente im Punkte d; aus diesem können die Punkte d_1, d_2, $d_3 \ldots d_7$, welche symmetrisch liegen, so wie ihre Tangenten unmittelbar erhalten werden.

In der Regel werden die 16 Punkte mit ihren Tangenten, die wir oben finden lernten, ausreichen, um die Centralellipse zu zeichnen, so dass von ihrer Construction aus den gefundenen conjugirten Durchmessern, oder von der Auffindung der Hauptaxen, wie dies oben angedeutet worden ist, Umgang wird genommen werden können.

Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rechteck ist, so erhält man auf obige Weise sogleich die Hauptaxen der Centralellipse. Diese letztere wird für das Quadrat ein Kreis, dessen Radius $r = \sqrt{\frac{1}{12}a^2}$ ist, wenn a die Seite des Quadrats bezeichnet. Der Kern wird in diesem Falle auch ein Quadrat, dessen Ecken auf den zu den Seiten parallelen Halbirungslinien des gegebenen liegen, und dessen Seitenlänge $\alpha = \sqrt{\frac{1}{18}a^2}$ wird.

§ 133. **Das Dreieck** (Fig. 29 Taf. XI). — In der Centralellipse des Dreiecks ABC sind die Verbindungslinie einer Ecke A mit der Mitte D der gegenüberliegenden Seite und die Linie EF, welche durch den Schwerpunkt O parallel zu jener Seite BC gezogen ist, conjugirte Durchmesser. Für die Axe BC und für Entfernungen, die parallel zur Halbirungslinie AD gemessen sind, ist

$$\int_0^h a\frac{h-x}{h}x^2 \sin\varphi\, dx = \frac{1}{12}ah^3\sin\varphi$$

das Trägheitsmoment des Dreiecks, wo a die Seite BC, h die Halbirungslinie AD und φ den Winkel bezeichnet, den beide mit einander bilden. Das Quadrat des Schwungradius k jenes Trägheitsmomentes ist folglich

$$k^2 = \frac{\frac{1}{12}ah^3\sin\varphi}{\frac{1}{2}ah\sin\varphi} = \frac{1}{6}h^2,$$

und für eine Axe EF, die parallel zu BC in der Entfernung $i = \frac{1}{3}h$ durch den Schwerpunkt gelegt ist, wird das Quadrat des Schwungradius

$$\mathfrak{a}^2 = k^2 - i^2 = \frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{9}h^2 = \frac{1}{18}h^2.$$

Dieses $\mathfrak{a}$ ist nichts anderes als der in der Halbirungslinie AD liegende Halbdurchmesser und kann entweder berechnet und dann aufgetragen werden, indem man

$$\mathfrak{a} = 0{,}2357\,h$$

macht, oder man kann $\mathfrak{a}$ aus der Formel

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\tfrac{1}{6}h.\tfrac{1}{3}h}$$

construiren. Letzteres ist in der Figur mittelst des über OD beschriebenen Halbkreises geschehen. Man fand so die Punkte 1 und 2 der Centralellipse mit ihren zu BC parallelen Tangenten.

Um den zu 1 2 conjugirten Durchmesser seiner Grösse nach zu finden, ergibt sich aus Obigem unmittelbar, dass das Trägheitsmoment des Dreiecks ADC oder ADB für die Axe AD und für Entfernungen, die parallel zu BC gemessen werden,

$$= \frac{1}{12}h\left(\tfrac{1}{2}a\right)^3\sin\varphi$$

ist. Das des ganzen Dreiecks ABC ist folglich unter denselben Voraussetzungen

$$= \frac{1}{6}h\left(\tfrac{1}{2}a\right)^3\sin\varphi,$$

und das Quadrat des Schwungradius, welcher hier sofort der gesuchte Halbdurchmesser ist,

$$\mathfrak{b}^2 = \frac{\frac{1}{6}h\left(\frac{1}{2}a\right)^3\sin\varphi}{\frac{1}{2}ah\sin\varphi} = \frac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2.$$

Construirt man $\mathfrak{b}$ nach der Formel

$$\mathfrak{b} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}a\right) . \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}a\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\overline{DC} . \tfrac{1}{3}\overline{DC}},$$

was in der Figur mittelst des Halbkreises geschah, dessen Durchmesser die Hälfte von DC ist, so erhält man die Ellipsenpunkte 3 und 4 mit ihren zu AD parallelen Tangenten.

Acht weitere solche Punkte 5 bis 12 mit ihren Tangenten findet man, wenn man in ähnlicher Weise, wie vorhin von der Seite BC, von den Seiten AC und AB als Grundlinien des Dreiecks ABC ausgeht.

Um den Kern zu erhalten, denke man sich die neutrale Axe zunächst wieder in BC liegend. Dann liegt der Angriffspunkt α der Resultante aller Kräfte, die am Dreieck wirken und auf BC bezogen sind, in dem zu BC conjugirten Durchmesser AD der Centralellipse und zwar so, dass er in der letztern der Pol einer mit BC symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegenden Parallelen ist; oder seine Entfernung vom Schwerpunkt ist

$$\overline{O\alpha} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OD}} = \frac{\frac{1}{18}h^2}{\frac{1}{3}h} = \tfrac{1}{6}h.$$

Dies ist unmittelbar aufzutragen. In gleicher Weise finden sich die Punkte β und γ bezüglich der Seiten AC und AB; und das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, das dem Dreieck ABC ähnlich ist, und dessen Dimensionen alle viermal so klein, als diejenigen des letztgenannten Dreiecks sind, ist der Kern desselben.

Die Seite $\beta\gamma$ dieses Kerns ist die Polare eines mit A zum Schwerpunkt symmetrisch gelegenen Punktes A′. Die Punkte δ und A′ müssen folglich durch die Ellipsenpunkte 1 und 2 harmonisch getrennt werden, oder es muss

$$\overline{O\delta} \times \overline{OA'} = \overline{O1}^2$$

sein. Dies ist in der That erfüllt, da $\overline{O\delta} = \frac{1}{12}h$, $\overline{OA'} = \frac{2}{3}h$ und $\overline{O1}^2 = \frac{1}{18}h^2$ ist.

Zwei vom Punkte A′ an die Centralellipse gezogene Tangenten müssen dieselbe in Punkten berühren, in denen sie von der Polaren $\beta\gamma$ geschnitten wird. Hiernach kann man diese Punkte ganz in derselben Weise construiren, wie es im vorigen § in einem ähnlichen Fall gezeigt wurde. Mittelst des Halbkreises über δe erhält man die Ellipsenpunkte 13 und 14 mit ihren durch A′ gehenden Tangenten, und in ganz gleicher Weise die vier anderen Punkte 15 bis 18 mit ihren Tangenten durch die Punkte B′, C′, die mit denen B und C symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegen.

Die oben erhaltenen 18 Punkte werden in der Regel hinreichen, die Centralellipse zu ziehen.

Für ein gleichschenkeliges Dreieck erhält man durch obiges Verfahren sofort die Hauptaxen der Centralellipse. Diese wird für ein gleichseitiges Dreieck ein Kreis, dessen Radius $r = \sqrt{\frac{1}{24}a^2}$ ist, wenn a die Seite des Dreiecks bezeichnet.

§ 134. **Das Paralleltrapez** (Fig. 30 Taf. XII). — In der Centralellipse des Paralleltrapezes ABCD sind die Linie EF, welche die Mitten der parallelen Seiten verbindet, und die durch den Schwerpunkt gezogene Parallele GH zu diesen Seiten conjugirte Durchmesser. Ihre Längen finden sich in folgender Weise. Für die Momentenaxe AB und die Richtung EF, welche den Winkel φ mit ihr bildet, ist das Trägheitsmoment des Trapezes

$$\int_0^h \left(a - (a - b)\frac{x}{h}\right) x^2 \sin\varphi \, dx = \frac{1}{12}(a + 3b) h^3 \sin\varphi,$$

wobei a und b die Längen der Parallelseiten AB und CD und h die der Halbirungslinie EF bezeichnen. Der Schwungradius jenes Trägheitsmomentes ist, ins Quadrat erhoben,

$$k^2 = \frac{\frac{1}{12}(a + 3b) h^3 \sin\varphi}{\frac{1}{2}(a + b) h \sin\varphi} = \frac{1}{6}\,\frac{a + 3b}{a + b}\, h^2.$$

Hiernach folgt der Schwungradius $\mathfrak{a}$ für die Axe GH, welche, durch den Schwerpunkt gehend, die in der Richtung EF gemessene Entfernung $i = \frac{1}{3} h \frac{a + 2b}{a + b}$ von jener hat, aus der Relation:

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{1}{6} \frac{a + 3b}{a + b} h^2 - \frac{1}{9} h^2 \left(\frac{a + 2b}{a + b}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{9} \frac{ab}{(a + b)^2}\right) h^2.$$

Dieser Schwungradius $\mathfrak{a}$ ist die Hälfte des in EF liegenden Durchmessers der Centralellipse. Um ihn nach obiger Formel zu construiren, schreibe man:

$$(3\mathfrak{a})^2 = \frac{1}{2} h^2 + \frac{ab}{(a + b)^2} h^2.$$

Beschreibt man über EF, als über einem Durchmesser, einen Halbkreis und errichtet auf EF in seinem Mittelpunkte O_1 und in dem Punkte K, wo sich die Diagonalen schneiden, Senkrechte O_1J und KL bis zur Peripherie des Halbkreises, so ist

$$\overline{FJ}^2 = \frac{1}{2} h^2 \text{ und } \overline{KL}^2 = \frac{ab}{(a + b)^2} h^2,$$

letzteres, weil $EK = \frac{b}{a + b} h$ und $KF = \frac{a}{a + b} h$. Trägt man also KL als JM auf JE auf, so ist

$$\overline{FM} = \sqrt{\frac{1}{2} h^2 + \frac{ab}{(a + b)^2} h^2} = 3\mathfrak{a},$$

und daher der gesuchte Halbdurchmesser der Centralellipse $O\mathfrak{a} = O\mathfrak{a}_1$ der dritte Theil von FM.

Man überzeugt sich leicht, dass dieselbe Construction mit den entsprechenden Modificationen auch für das Parallelogramm und Dreieck angewendet werden kann.

Um den anderen Halbdurchmesser zu finden, berechnen wir das Trägheitsmoment des Trapezes für die Axe EF und die Richtung GH. Es wird

$$2\left(\int_0^{\frac{b}{2}} h y^2 dy + \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} h \frac{a - 2y}{a - b} y^2 dy\right) \sin \varphi$$

$$= \frac{h}{48} \left(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3\right) \sin \varphi.$$

Das Quadrat des Schwungradius desselben, welcher sogleich der gesuchte Halbdurchmesser selbst ist, wird demnach

$$\mathfrak{b}^2 = \frac{\frac{h}{48} (a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3) \sin \varphi}{\frac{1}{2} (a + b) h \sin \varphi}$$

$$= \frac{1}{24} \left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{6} \left((\tfrac{1}{2} a)^2 + (\tfrac{1}{2} b)^2\right).$$

Hiernach ist $\mathfrak{b}$ leicht zu construiren: In dem rechtwinkeligen Dreieck FAN, dessen Katheten $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ sind, ist die Hypotenuse $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2}$. Beschreibt man über ihrer Hälfte FU einen Halbkreis und macht $FW = \frac{1}{3} FN$, so ist die zu letzterem Abschnitt gehörige Sehne FV der gesuchte Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$, welcher als $O\mathfrak{b}$ und $O\mathfrak{b}_1$ aufgetragen worden ist.

Durch die beiden conjugirten Durchmesser $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ ist die Centralellipse bestimmt und kann auf gewöhnliche Weise gezeichnet werden. Der Kern ist aber zu construiren, ohne dass man die Centralellipse wirklich zieht, und zwar auf folgende Weise:

Wenn die neutrale Axe in AB liegt, so liegt der Angriffspunkt α der Resultante aller Kräfte, welche an dem Trapez wirken und auf sie bezogen sind, in dem zu AB conjugirten Durchmesser FE

so, dass er der Pol einer mit AB parallelen und bezüglich des Schwerpunkts symmetrischen Linie ist, oder dass

$$\overline{O\alpha} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OF}}.$$

Es kann also $O\alpha$ leicht construirt werden und ist dies in der Figur mittelst des über OF beschriebenen Halbkreises geschehen. In ganz derselben Weise erhält man den Angriffspunkt γ der Resultante, wenn die neutrale Axe in CD liegt, mittelst eines über OE gezogenen Halbkreises.

Wenn die neutrale Axe, durch die Eckpunkte B oder C des Trapezes gehend, parallel zu EF ist, dann liegen die ihr entsprechenden Angriffspunkte der Resultante, ε und ς, in dem ihr conjugirten Durchmesser GH so, dass

$$\overline{O\varepsilon} = \frac{\mathfrak{b}^2}{\overline{OH'}} \text{ und } \overline{O\varsigma} = \frac{\mathfrak{b}^2}{\overline{OH''}}.$$

Beide Strecken sind leicht zu construiren und ist dies in der Figur mit Hülfe der über OH' und OH'' beschriebenen Halbkreise geschehen. Zwei mit ε und ς symmetrisch liegende Punkte ε' und ς' erhält man für den Fall, dass die neutrale Axe parallel zu EF durch den Eckpunkt A bezw. D des Trapezes gelegt wird.

Während die neutrale Axe, von der Lage AB in die BC übergehend, sich um den Punkt B dreht, bewegt sich der Angriffspunkt auf der Linie $\alpha\varepsilon$, und während des Ueberganges der neutralen Axe von BC nach CD, beschreibt der Angriffspunkt die Gerade $\varsigma\gamma$. Diese Linien sind folglich Seiten des Kerns und ihr Schnittpunkt eine dritte Ecke β desselben. Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhält man die Seiten $\alpha\varepsilon'$ und $\varsigma'\gamma$ und die vierte Ecke δ des Kerns, der hiemit vollständig bestimmt ist.

Die Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ des Kerns sind in der Centralellipse die Polaren der Punkte B', C', D' und A', welche mit den Eckpunkten B, C, D, A des Trapezes symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegen. Die Durchschnittspunkte jener Seiten mit der Centralellipse sind folglich die Berührungspunkte der Tangenten, welche von B', C', D', A' aus an diese gezogen werden. Aber diese Berührungspunkte können hier nicht, wie in den beiden vorigen Paragraphen, direct construirt werden, weil die zu den Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ parallelen Durchmesser der Centralellipse nicht bekannt sind.

In der Figur wurde desshalb die Centralellipse lediglich aus ihren beiden conjugirten Durchmessern $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, construirt, und die Tangenten an sie aus den Punkten B', C', D', A' bis zu den Durchschnittspunkten der Seiten $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ mit ihr bloss der Controle halber gezogen.

§ 135. **Die Ellipse und der Kreis** (Fig. 31 Taf. XII). — Aus den allgemeinen Betrachtungen im § 123 folgt unmittelbar, dass irgend ein Paar conjugirter Durchmesser einer Ellipse ABA_1B_1 auch in der Centralellipse derselben conjugirt sind. Die halben Längen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ derjenigen Durchmesser der Centralellipse, welche mit den conjugirten Durchmessern $\overline{AA_1} = 2a$ und $\overline{BB_1} = 2b$ der gegebenen Ellipse zusammenfallen, finden sich aus diesen letzteren sehr einfach auf folgende Weise: Das Trägheitsmoment der Ellipse ABA_1B_1 für die Momentenaxe BB_1 und für die Richtung AA_1, die mit BB_1 den Winkel φ bildet, ist

$$\int_{-a}^{+a} 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\sin\varphi\, x^2\, dx = \tfrac{1}{4} a^3 b \pi \sin\varphi$$

und folglich das Quadrat des Schwungsradius desselben oder der Halbaxe $\mathfrak{a}$ der Centralellipse, die auf OA liegt,

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\frac{1}{4} a^3 b \pi \sin\varphi}{a b \pi \sin\varphi} = \tfrac{1}{4} a^2,$$

also

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2} a.$$

In gleicher Weise findet sich der andere Halbdurchmesser

$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}\,b.$$

Die Centralellipse ist also der gegebenen ähnlich und mit ihr ähnlich gelegen, und ihre Dimensionen sind alle halb so gross, als die der letzteren Ellipse.

Eine ähnliche einfache Beziehung hat der Kern der gegebenen Ellipse zu dieser. Ist N N eine neutrale Axe, welche die Ellipse in C berührt, so ist ihr die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Mittelpunkte O in der gegebenen Ellipse sowohl als in ihrer Centralellipse conjugirt. Der Angriffspunkt der Resultante aller Kräfte also, welche an der Ellipsenfläche wirken und auf die neutrale Axe N N bezogen sind, liegt in jener Verbindungslinie, und zwar so, dass seine Entfernung vom Mittelpunkte O, nämlich

$$\overline{O\delta} = \frac{\overline{O\mathfrak{D}}^2}{\overline{OD}}$$

ist. Da aber $O\mathfrak{D}$ halb so gross als OD ist, so wird

$$\overline{O\delta} = \tfrac{1}{4}\overline{OD} = \tfrac{1}{2}\overline{O\mathfrak{D}}.$$

Der Kern ist folglich wieder eine der gegebenen ähnliche und mit ihr ähnlich liegende Ellipse, deren Dimensionen alle viertel so gross als die jener sind.

Die Centralellipse eines Kreises ist demnach ein mit ihm concentrischer Kreis, dessen Radius halb so gross ist, und der Kern ist wieder ein concentrischer Kreis, dessen Radius nur den vierten Theil des gegebenen beträgt.

Die Centralellipse eines Ringes, der von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen begrenzt wird, ist offenbar mit letzteren beiden concentrisch, denselben ähnlich und mit ihnen ähnlich gelegen. Bezeichnen a, b ein Paar conjugirter Halbdurchmesser der äusseren Ellipse, am und bm die mit ihnen zusammenfallenden der inneren, wo m eine absolute Zahl und zwar ein ächter Bruch ist, dann wird das Trägheitsmoment des Ringes für den Durchmesser b als Momentenaxe und für die Richtung des Durchmessers a, welcher mit jenem den Winkel φ bildet, gleich

$$\tfrac{1}{4}a^3 b\,\pi \sin\varphi\,(1-m^4)$$

und folglich das Quadrat des Schwungradius oder des Halbdurchmessers $\mathfrak{a}$ der Centralellipse, der mit a zusammenfällt,

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\tfrac{1}{4}a^3 b\,\pi\sin\varphi\,(1-m^4)}{a b\,\pi \sin\varphi\,(1-m^2)} = \tfrac{1}{4}a^2(1+m^2)$$

oder

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{1+m^2}.$$

Eben so findet sich

$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}b\sqrt{1+m^2}.$$

Für irgend eine Lage der neutralen Axe, in der sie die gegebene äussere Ellipse berührt, ist derjenige Radiusvector ϱ der Kern-Ellipse, welcher auf der Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Mittelpunkt der Ellipse liegt,

$$\varrho = \frac{\mathfrak{r}^2}{r}$$

wenn $\mathfrak{r}$ und r die auf derselben Geraden liegenden Radien-Vectoren der Centralellipse und bezw. der gegebenen äusseren Ellipse bezeichnen.

Nun ist aber

$$\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}r\sqrt{1+m^2}$$

folglich ist

$$\varrho = \tfrac{1}{4}r\,(1+m^2),$$

wonach die Kernellipse leicht construirt werden kann.

Für Sectoren und Segmente von Ellipsen oder Kreisen wird die Rechnung complicirter. Man behandelt sie desshalb besser graphisch, indem man sie in dünne Lamellen zerschneidet und dann so verfährt, wie im § 138 gezeigt werden wird.

§ **136. Das Parabelsegment** (Fig. 32 Taf. XII). — Wir setzen voraus, dass das Parabelsegment ABC von einer beliebigen Sehne $BC = 2h$ begrenzt werde, deren conjugirter Durchmesser $AD = l$ sei. Dann ist leicht zu sehen, dass diese beiden Richtungen auch in der Centralellipse conjugirt sind, deren Mittelpunkt O bekanntlich AD im Verhältniss von 2 : 3 so theilt, dass das kleinere Stück zunächst an BC liegt. AD und EF, das parallel zu BC durch den Schwerpunkt O gezogen ist, sind folglich conjugirte Durchmesser der Centralellipse. Um die Länge desjenigen zu finden, der in AD liegt, berechnen wir zunächst das Trägheitsmoment des Segments in Bezug auf eine zu EF parallele Momentenaxe YY, welche die Parabel in A berührt, und für die Richtung AD, die mit EF den Winkel φ bildet. Es findet sich als

$$\int_0^l 2\sqrt{2px}\,\sin\varphi\, x^2\, dx = \tfrac{4}{7}\sin\varphi\, l^3 h,$$

wo p den Parameter der Parabel bezeichnet.

Da nun die Fläche des Segmentes

$$\tfrac{4}{3}\sin\varphi\, l\, h$$

ist, so folgt der Schwungradius des obigen Trägheitsmomentes, ins Quadrat erhoben, als

$$k^2 = \tfrac{3}{7} l^2.$$

Das Quadrat des Schwungradius also für die zu YY parallele Axe EF, welche durch den Schwerpunkt geht, und deren Entfernung von YY $\tfrac{3}{5}l$ beträgt, ist

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{3}{7} l^2 - \tfrac{9}{25} l^2 = \tfrac{12}{175} l^2,$$

wo nun $\mathfrak{a}$ zugleich der auf AD liegende Halbdurchmesser der Centralellipse ist. Man wird denselben am einfachsten berechnen,

$$\mathfrak{a} = 0{,}261861,$$

und auftragen.

Um den anderen Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$ zu erhalten, berechnet man das Trägheitsmoment des Segmentes für die Axe AD und die Richtung EF. Es findet sich als

$$\int_{-h}^{+h} (l - x)\, y^2 \sin\varphi\, dy = \int_{-h}^{+h} \left(l - \frac{y^2}{2p}\right) y^2 \sin\varphi\, dy = \tfrac{4}{15}\, l\, h^3 \sin\varphi.$$

Der Schwungradius desselben und daher der gesuchte Halbdurchmesser $\mathfrak{b}$ wird folglich, ins Quadrat erhoben,

$$\mathfrak{b}^2 = \frac{\tfrac{4}{15}\, l\, h^3 \sin\varphi}{\tfrac{4}{3}\, l\, h \sin\varphi} = \tfrac{1}{5} h^2.$$

Man wird auch hier am einfachsten $\mathfrak{b}$ aus

$$\mathfrak{b} = 0{,}44721\, h$$

berechnen und auftragen.

So hat man zwei conjugirte Durchmesser der Centralellipse $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ gefunden und kann diese somit construiren.

Um den Kern zu erhalten, lassen wir die neutrale Axe zuerst mit der Sehne BC zusammenfallen. Dann liegt der Angriffspunkt der Resultante aller auf das Segment einwirkenden Kräfte, die auf jene Axe bezogen sind, in dem conjugirten Durchmesser DA der Centralellipse, und zwar so, dass

$$= \frac{\mathfrak{a}^2}{OD} = \frac{\tfrac{12}{175} l^2}{\tfrac{2}{5} l} = \tfrac{6}{35} l.$$

Während sich die neutrale Axe um B dreht, um von BC aus in die Lage der Tangente BG überzugehen, oder um C, um von derselben Anfangsstellung in die der Tangente CG zu kommen, beschreibt der Angriffspunkt gerade Linien, die von α ausgehen. Wir können dieselben leicht erhalten, wenn wir bemerken, dass bei jener Drehung um B oder C die neutrale Axe auch in diejenigen Stellungen kommt, wo sie parallel zu AD ist, wo also der entsprechende Angriffspunkt β oder γ auf dem conjugirten Durchmesser EF der Centralellipse und zwar so liegt, dass

$$\overline{O\beta} = \overline{O\gamma} = \frac{\mathfrak{b}^2}{h} = \frac{\frac{1}{5}h^2}{h} = \tfrac{1}{5}h$$

ist.

Während dann die neutrale Axe von CG nach GB übergeht, indem sie die Parabel fortwährend berührt, beschreibt der Angriffspunkt eine Ellipse, die von den Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ berührt wird und leicht näher bestimmt werden kann. Bei jener Bewegung der neutralen Axe erhält dieselbe auch einmal die Lage, wo sie, parallel zur Sehne BC, die Parabel im Scheitel A berührt; für diese Lage befindet sich der Angriffspunkt δ auf dem conjugirten Durchmesser AD der Centralellipse und wird

$$\overline{O\delta} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OA}} = \frac{\frac{12}{175}l^2}{\frac{3}{5}l} = \tfrac{4}{35}l.$$

Dieser Punkt δ ist ein Punkt der Ellipse. Aber die Tangente CG kann auch dadurch in die Lage GB übergehen, dass sie sich um den Punkt G dreht. Dann bleibt der Angriffspunkt auf einer geraden Linie, auf derjenigen nämlich, welche in der Centralellipse die Polare eines anderen Punktes ist, der mit G symmetrisch zum Schwerpunkt liegt. Jene gerade Linie ist folglich parallel zu $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ und durchschneidet $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ in einem solchen Punkte ε, für welchen

$$\overline{O\varepsilon} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\overline{OG}} = \frac{\frac{12}{175}l^2}{\frac{8}{5}l} = \frac{1\frac{1}{2}}{35}l$$

ist. Da aber unter all' den Lagen der neutralen Axe, bei denen sie durch den Punkt G hindurchgeht, auch die GC und GB vorkommen, in denen sie Tangente an die Parabel ist, so müssen die Angriffspunkte, welche letzteren entsprechen, sowohl auf der Ellipse, als auf jener Polaren, als auch auf den Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ liegen, d. h. die Durchschnittspunkte ς und η der Polaren mit den Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ sind die Berührungspunkte der letzteren an der Kernellipse. Folglich ist $\varsigma\eta$ die Polare des Punktes α in letzterer Ellipse und daher die Richtungen $\alpha\delta$ und $\varsigma\eta$ in dieser conjugirt, und zwar geht $\alpha\delta$ durch ihren Mittelpunkt. Dieser und damit die Länge des auf $\alpha\delta$ liegenden Durchmessers ist leicht zu erhalten. Da nämlich zwei unendlich ferne, zu AD parallele Gerade die Parabel auch berühren, so muss der Mittelpunkt O der Centralellipse in der Kernellipse liegen. $O\delta$ ist also der Durchmesser derselben und o, in seiner Mitte, der Mittelpunkt. In der That ist

$$\overline{Oo}^2 = (\tfrac{2}{35}l)^2 = \overline{\alpha o}\cdot\overline{\varepsilon o} = \tfrac{8}{35}l \times \frac{\frac{1}{2}}{35}l = (\tfrac{2}{35}l)^2.$$

Hiernach ist es leicht, die Ellipse vollends zu construiren.

§ **137. Das Parabeldreieck** (Fig. 32 Taf. XII). — So nennt man bekanntlich die Fläche zwischen den Tangenten CG und BG an die Parabel und dem Parabelbogen BAC. Es ist leicht zu sehen, dass die in der Parabel conjugirten Richtungen AD und BC auch in der Centralellipse des Parabeldreiecks conjugirt sind, dessen Schwerpunkt O′ um $\frac{1}{4}$AG oder, nach der Bezeichnungsweise des vorigen §, die wir hier beibehalten, um $\frac{1}{5}l$ von A entfernt ist.

Um die Längen der auf GA und E′F′ liegenden conjugirten Durchmesser der Centralellipse zu erhalten, betrachten wir das Parabeldreieck als Differenz des geradlinigen Dreiecks GBC und des Segmentes ABC und erinnern uns, dass die Fläche des letzteren doppelt, also die des Dreiecks GBC dreimal so gross als diejenige des Parabeldreieckes ist, die wir mit F bezeichnen wollen. Dann ist

für die Momentenaxe E″ F″, welche durch den Schwerpunkt S des Dreiecks parallel zu BC gelegt ist, und für die Richtung AD das Quadrat des Schwungradius $\mathfrak{a}''$ des Dreiecks nach § 133:

$$\mathfrak{a}''^2 = \tfrac{1}{18}(2l)^2 = \tfrac{2}{9}l^2.$$

Für die zu E″ F″ parallele Axe E′ F′, welche die Entfernung $O'S = \frac{1}{5}l + (l - \frac{2}{3}l) = \frac{8}{15}l$ von jener hat, wird der Schwungradius folglich

$$k''^2 = \tfrac{2}{9}l^2 + (\tfrac{8}{15}l)^2 = \tfrac{114}{225}l^2,$$

und daher ist das Trägheitsmoment des Dreiecks um jene Axe E′ F′

$$\Theta'' = \tfrac{114}{225}l^2 .\ 3F = \tfrac{114}{75}l^2F.$$

In gleicher Weise ist das Quadrat des Schwungradius des Segmentes ABC für die Axe EF und die Richtung AD nach vorigem §:

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{12}{175}l^2,$$

und folglich für die Axe E′ F′, welche parallel mit jener ist und die Entfernung $\overline{O'O} = \frac{1}{5}l + \frac{3}{5}l = \frac{4}{5}l$ von ihr hat,

$$k^2 = \tfrac{12}{175}l^2 + (\tfrac{4}{5}l)^2 = \tfrac{124}{175}l^2.$$

Das Trägheitsmoment des Segmentes ist daher für dieselbe Axe und Richtung

$$\Theta = \tfrac{124}{175}l^2 .\ 2F = \tfrac{248}{175}l^2F.$$

Folglich ist das Trägheitsmoment des Parabeldreiecks GBC für die nämliche Axe E′ F′

$$\Theta' = \Theta'' - \Theta = (\tfrac{114}{75} - \tfrac{248}{175})l^2F = \tfrac{18}{175}l^2F.$$

Der Schwungradius dieses Trägheitsmomentes, ins Quadrat erhoben, ist also

$$\mathfrak{a}'^2 = \tfrac{18}{175}l^2 = (0{,}32071\,l)^2,$$

und hier bedeutet $\mathfrak{a}'$ nun sogleich den auf AG liegenden Halbdurchmesser der Centralellipse.

Um den andern zu finden, hat man für die Axe GD und die Richtung BC:
den Schwungradius des Dreiecks GBC

$$\mathfrak{b}''^2 = \tfrac{1}{6}h^2 \qquad (\S\ 133),$$

den des Segmentes ABC

$$\mathfrak{b}^2 = \tfrac{1}{5}h^2,$$

folglich das Trägheitsmoment des Dreieckes GBC

$$\Theta_1'' = \tfrac{1}{6}h^2 .\ 3F = \tfrac{1}{2}h^2F$$

und das des Segmentes

$$\Theta_1 = \tfrac{1}{5}h^2 .\ 2F = \tfrac{2}{5}h^2F,$$

und somit das des Parabeldreiecks für dieselbe Axe

$$\Theta_1' = \Theta_1'' - \Theta_1 = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5})h^2F = \tfrac{1}{10}h^2F.$$

Hieraus folgt das Quadrat des Schwungradius $\mathfrak{b}'$ oder des auf E′ F′ liegenden Halbdurchmessers

$$\mathfrak{b}'^2 = \tfrac{1}{10}h^2 = (0{,}31623\,h)^2.$$

Aus den so gefundenen conjugirten Durchmessern kann die Centralellipse $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1'$ construirt werden.

Bei der Bestimmung des Kerns kommt der Parabelbogen nicht in Betracht, weil alle Tangenten an ihn innerhalb des Parabeldreiecks liegen. Der Kern wird folglich ein Dreieck, dessen Eckpunkte den drei Lagen BC, CG, GB der neutralen Axe entsprechen. Der Eckpunkt α', welcher der Lage BC zugehört, liegt auf dem derselben conjugirten Durchmesser $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'$ der Centralellipse so, dass

$$\overline{O'\alpha'} = \frac{\mathfrak{a}'^2}{\overline{O'D}} = \frac{\frac{18}{175}l^2}{\frac{6}{5}l} = \tfrac{3}{35}l.$$

Auf den von diesem Endpunkte ausgehenden Seiten des Kerns bewegt sich der Angriffspunkt, während die neutrale Axe von BC aus nach CG oder BG übergeht, indem sie sich um C oder B

dreht. Dabei nimmt sie auch die Lagen ein, wo sie zu DG parallel ist. In diesem Falle liegen die entsprechenden Angriffspunkte β', γ' in dem conjugirten Durchmesser der Centralellipse so, dass

$$\overline{O'\beta'} = \overline{O'\gamma'} = \frac{\mathfrak{b}'^2}{h} = \frac{\frac{1}{10}h^2}{h} = \tfrac{1}{10}h$$

ist. Durch sie sind die Seiten $\alpha'\beta'$ und $\alpha'\gamma'$ ihrer Richtung nach bestimmt.

Auf der dritten Seite des Dreiecks bewegt sich der Angriffspunkt, während sich die neutrale Axe um G dreht, um von CG nach GB überzugehen. Jene Seite ist folglich in der Centralellipse die Polare eines Punktes, der mit G symmetrisch gegen den Schwerpunkt O' liegt; sie ist also parallel zum Durchmesser $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'_1$ und durchschneidet den andern in einem Punkte δ', der so liegt, dass

$$\overline{O'\delta'} = \frac{\mathfrak{a}'^2}{\overline{O'G}} = \frac{\frac{18}{175}l^2}{\frac{4}{5}l^2} = \tfrac{9}{70}l$$

ist. Hiedurch ist nun der Kern vollständig bestimmt.

§ **138. Das Schienenprofil** (Fig. 22 Taf. VII) ist, wenigstens zum Theil, ein „einfacher" Querschnitt im Sinne der Definition im § 131. Zwei conjugirte Durchmesser der Centralellipse desselben sind nach § 123 die Symmetrieaxe und die zu ihr senkrechte Linie durch den Schwerpunkt, den wir wie im § 92 gefunden hier voraussetzen. In den genannten Durchmessern liegen die Hauptaxen der Centralellipse, weil sie auf einander senkrecht stehen. Um ihre Längen zu finden, hat man die Trägheitsmomente oder eigentlich die Schwungradien des Profils einmal für die eine, dann für die andere Hauptaxe als Momentenaxe zu suchen.

Behufs der Construction der in der Symmetrieaxe YY liegenden Hauptaxe denken wir uns das Profil senkrecht auf jene erstere in Lamellen zerschnitten, welche als Trapeze oder Rechtecke betrachtet werden können. Wir benützen natürlich dieselben, welche schon zur Aufsuchung des Schwerpunktes S dienten. In ihren Schwerpunkten (1), (2)... (19) müssen wir uns Kräfte, gleich ihren Flächeninhalten, parallel zur Axe XX wirken denken und deren statische Momente in Bezug auf diese Axe finden. Jene Kräfte haben wir behufs Aufsuchung des Schwerpunktes S schon construirt und zu dem Kräftepolygon 0 1 2 ... 19 mit dem Pol C zusammengetragen. Das zugehörige, ebenfalls zu jenem Zwecke bereits construirte Seilpolygon 0 I II ... XX gibt in den Abschnitten 0'1', 1'2', 2'3' ... 18'19' seiner auf einander folgenden Seiten mit der Axe XX die gesuchten statischen Momente, reducirt auf die Basis H, welche gleich der senkrechten Entfernung des Poles C von der zugehörigen Kräftelinie ist. Ihre Summe ist Null, weil sie auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe bezogen sind.

Diese statischen Momente hat man sich als Kräfte wieder parallel zur XX-Axe in den Schwerpunkten der Momente der einzelnen Lamellen wirken zu denken. Letztere Schwerpunkte findet man bekanntlich mit Hülfe der Centralellipsen der Lamellen. In allen diesen Centralellipsen sind die Richtungen XX und YY conjugirt, und zwar liegen die Durchmesser von letzterer Richtung in der Axe YY selbst. In derselben liegen folglich auch die gesuchten Momenten-Schwerpunkte, und bezeichnet wie früher i die Entfernung des Schwerpunktes einer Lamelle von der Axe XX, $\mathfrak{a}$ den in YY liegenden halben Durchmesser ihrer Centralellipse und m die Entfernung ihres Momentenschwerpunktes vom Mittelpunkt der letzteren, so ist

$$m = \frac{\mathfrak{a}^2}{i}.$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass m nur für die Lamellen (10), (11) und (12), welche von bedeutender Grösse sind und nahe an der Axe XX liegen, einen merklichen Werth erhält. Für diese Lamellen haben wir die nach obiger Formel construirten Momentenschwerpunkte mit (10)' (11)', (12)' bezeichnet, für alle anderen fallen sie mit den Kräfteschwerpunkten zusammen.

Da die Momente 0'1', 1'2', 2'3' ... bereits zu einem Kräftepolygon vereinigt sind, so braucht man nur noch einen Pol C' anzunehmen und hiezu zwischen den durch (1), (2) ... (9), (10)', (11)',

(12)′, (13) . . . (19) gezogenen Parallelen zu XX das Seilpolygon 0′ I′ II′ . . . XX′ zu zeichnen. Die äussersten Seiten des letzteren, welche parallel zu einander werden, schneiden auf der Axe XX das reducirte Trägheitsmoment 0″ 19″ ab. Dasselbe bezieht sich auf die schon erwähnte Basis H und auf die H′, gleich der senkrechten Entfernung des Poles C′ von seiner Kräftelinie. Nennen wir die Basis, auf welche die Flächen bezogen wurden, und die wir im § 92 gleich 4^{cm} nahmen, im Allgemeinen a, so ist $a.H.H'.\overline{0''19''}$ das Trägheitsmoment des Schienenprofils für die Axe XX und für senkrecht zu dieser gemessene Entfernungen. Dasselbe, durch die Kräftesumme, hier durch den Flächeninhalt $a.\overline{0\,19}$ des Profils dividirt, gibt das Quadrat des Schwungradius oder der gesuchten Halbaxe

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{a.H.H'.\overline{0''19''}}{a.\overline{0\,19}} = \frac{H.H'.\overline{0''19''}}{\overline{0\,19}}.$$

Die Division wird auf graphischem Wege ausgeführt, indem man eine der Basen, H oder H′, gleich 0 19 wählt. Das ist in Fig. 22 nicht geschehen; es kann aber sehr leicht der Pol C′ im Kräftepolygon C′ 0′ 1′ 2′ . . . 19′ durch einen anderen, C_1', ersetzt werden, dessen Entfernung $0'C_1'$ von der Kräftelinie gleich 0 19 ist. Das ihm entsprechende Seilpolygon braucht man nicht ganz zu zeichnen, da es sich bloss um den Abschnitt seiner äussersten Seiten auf der Linie XX handelt. Es genügt, diese äussersten Seiten zu construiren, was mittelst einer einzigen mittleren, etwa der $X_1'XI_1'$, geschehen kann, und zwar in folgender Weise: Bei der Lage, welche wir den Polen C′ und C_1' gegeben haben, schneiden sich die gleichvielten Seiten der ihnen zugehörigen Seilpolygone in einer Verticallinie, als welche wir sofort die Seite XIX′ XX′ nehmen können, wenn wir die beiden letzten Seiten der Seilpolygone zusammenfallen lassen. Die Seite $X_1'\,XI_1'$ ist dann parallel zum Strahl $10'\,C_1'$ und geht durch den Durchschnittspunkt β' der Seiten X′ XI′ und XIX′ XX′ des alten Polygons. Sie ist hierdurch bestimmt. Durch den Durchschnittspunkt α' der Seiten 0′ I′ und X′ XI′ geht, und zwar in horizontaler Richtung, die Resultante der Momente 0′ 1′, 1′ 2′ . . . 9′ 10′. Dieselbe darf durch Aenderung des Poles im Kräftepolygon keine Aenderung erleiden und deshalb müssen sich die schon gefundene Seite $X_1'\,XI_1'$ und die erste Seite $0_1'\,I_1'$ des neuen Polygons auf der durch α' gelegten Horizontalen, in α_1', schneiden. Die letztere Seite ist hierdurch bestimmt, da ihre Richtung bekannt ist, und damit ist der dem neuen Pol C_1' entsprechende Abschnitt $0_1''19''$ der äussersten Seilpolygonseiten auf der Axe XX gefunden.

Die gleiche Construction hat man natürlich zu machen, wenn das Trägheitsmoment des Querschnitts durch eine andere Linie zu dividiren ist, durch die Entfernung der äussersten gezogenen oder gedrückten Fasern z. B., wenn aus dem Trägheitsmoment das in der Biegungstheorie so genannte Biegungsmoment gefunden werden will.

Der gesuchte Schwungradius oder die in YY liegende Halbaxe ist nun $\sqrt{H \times \overline{0_1''\,19''}}$ und kann auf bekannte Weise construirt werden. Sie wurde als $S\mathfrak{a} = S\mathfrak{a}'$ in die Figur eingetragen.

Um die andere, auf XX liegende Halbaxe der Centralellipse zu finden, hat man das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Axe YY und für senkrecht gemessene Entfernungen zu suchen. Zu diesem Behufe kann man das Profil in Lamellen parallel zu dieser Axe zerlegen und ganz so wie vorhin verfahren. Aber diese Zerlegung hat bei Querschnitten von der Art wie der in Rede stehende einige Schwierigkeiten, wenn es auf möglichste Genauigkeit abgesehen ist. Man wird desshalb lieber die schon gemachte Zerlegung in Lamellen parallel zur Axe XX beibehalten, und in der That ist dies, wie man leicht sieht, möglich. Denkt man sich die zur Axe XX parallelen Durchmesser der Centralellipsen dieser letzteren Lamellen gefunden, und in den Endpunkten derselben parallel zur YY-Axe Kräfte wirken, gleich den Flächeninhalten der Lamellen, so ist nach § 126 das Trägheitsmoment dieser Kräfte bezüglich der Axe YY gleich dem gesuchten Trägheitsmoment des Profils. Jene Durchmesser finden sich nach § 134 oder einfacher nach § 132, wenn man die Lamellen als Rechtecke betrachten darf, deren Breite gleich der mittleren Parallelen des

Trapezes ist; und das ist bei allen der Fall, mit Ausnahme der Lamelle (15). Wir haben die Durchmesser **berechnet**, die Hälften nach links aufgetragen, und ihre Enden mit (1)'', (2)'', (3)''... (19)'' bezeichnet. Zwischen den durch sie gezogenen Parallelen wurde dann das Seilpolygon 0'' I'' II''... XX'' gezeichnet, dessen Seiten senkrecht auf den Strahlen des Kräftepolygons C 0 1 2 ... 19 stehen und auf YY die statischen Momente 0''' 1''', 1''' 2''', 2''' 3''', ... abschneiden, die sofort zum Kräftepolygon 0''' 1''' 2''' ... 19''' vereiniget sind. Nimmt man für letzteres den Pol C''' in der Entfernung H''' von der Kräftelinie an, und construirt man daraus zwischen denselben Parallelen wie vorhin das Seilpolygon 0''' I''' II''' ... XX''', so schneiden dessen äusserste Seiten auf YY das gesuchte reducirte Trägheitsmoment $0^{IV}\,19^{IV}$ ab. Dasselbe bezieht sich auf die Basen H und H''' und ist daher eigentlich gleich $a \,.\, H \,.\, H''' \times \overline{0^{IV}\,19^{IV}}$. Mit $a.\overline{0\,19}$, dem Flächeninhalt des Profils, dividirt gibt es das Quadrat der gesuchten Halbaxe. Um diese Division leicht ausführen zu können, haben wir diesmal H''' halb so gross als $\overline{0\,19}$ gemacht, und daher ist die gesuchte Halbaxe

$$S\mathfrak{b} = S\mathfrak{b}' = \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot 0^{IV}\,19^{IV}.H} = \sqrt{0^{IV}\,19^{IV}_{1}.H}$$

und kann auf bekannte Weise construirt werden.

Mittelst der beiden Hauptaxen kann man die Centralellipse auf gewöhnliche Weise zeichnen. Die Construction des Kerns ist sehr einfach. Indem man die neutrale Axe aus der Lage MM_1 am Fusse des Profils, wo ihr der Angriffspunkt γ der Resultante in bekannter Weise entpricht, in die Lage M_1M_2 mit dem zugehörigen Angriffspunkt δ überführt, muss man sie um M_1 drehen, weshalb der Angriffspunkt die gerade Linie $\gamma\delta$ durchläuft. Während dann die neutrale Axe, das Profil fortwährend berührend, in die Stellung M_3M_4 und von da in diejenige übergeht, wo sie, horizontal liegend, den Kopf des Profils berührt, und wo ihr der Angriffspunkt ε entspricht, beschreibt der letztere eine krumme Linie $\delta\varepsilon$, von der eine genügende Anzahl von Punkten in bekannter Weise construirt werden kann. Die andere Seite des Kerns ist natürlich symmetrisch zu der so gezeichneten bezüglich der Axe YY.

Da es sich bei obiger Construction immer bloss um die Auffindung von Durchmessern der Centralellipse handelt, die den Momentenaxen MM_1, M_1M_2 etc. conjugirt sind, also um Tangenten, parallel zu letzteren an die Centralellipse, so braucht man letztere nicht gezeichnet zu haben, um den Kern finden zu können; jene Tangenten mit ihren Berührungspunkten sind in bekannter Weise schon aus den Hauptaxen allein zu erhalten.

§ **139. Das Winkeleisenprofil** (Fig. 23 Taf. VIII), dessen Schwerpunkt wir schon im § 93 bestimmt haben, wählen wir als Beispiel für einen ganz unregelmässigen Querschnitt, welcher die Kennzeichen der im § 131 definirten „Einfachheit" nicht mehr besitzt, der aber in eine kleinere Anzahl von Theilen zerlegbar ist, deren Centralellipsen gefunden werden können. Wir behalten dieselbe Zerlegung bei, wie die im § 93 gebrauchte, und setzen die Schwerpunkte (1), (2), (3)...(6) der Theile, sowie die Centralellipsen derselben als bekannt voraus. Ebenso die auf die Basis $a = 2$ Centimeter reducirten Flächeninhalte der Stücke, welche schon behufs der Bestimmung des Schwerpunkts S zum Kräftepolygon C 0 1 2...6 zusammengetragen worden sind, aus dem das Seilpolygon 0 I II.... VII construirt wurde. An dieses letztere knüpfen wir nun die weitere Construction behufs Aufsuchung der Centralellipse an, indem wir die horizontale Axe XX durch den Schwerpunkt als den einen, willkürlich zu wählenden Durchmesser der Centralellipse nehmen und (nach dem Satze im § 116) den dazu conjugirten suchen. Die Abschnitte 0' 1', 1' 2'...5' 6' der auf einander folgenden Seiten jenes Seilpolygons auf der Axe XX sind die statischen Momente der in den Punkten (1), (2)... (6) als Kräfte wirkenden Flächeninhalte der Stücke. Diese Momente hat man sich nun als Kräfte in den Momentenschwerpunkten der Stücke wirken zu denken und ihren Gesammtschwerpunkt zu suchen. Jene Momentenschwerpunkte der Stücke sind aber in deren Centralellipsen die Pole einer

Linie, die mit der Axe XX parallel ist und symmetrisch mit ihr gegen die betreffenden Mittelpunkte liegt; sie finden sich also auf den zu XX conjugirten Durchmessern der Centralellipsen in einer Entfernung

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathrm{i}}$$

von deren Mittelpunkten, wenn $\mathfrak{a}$ die halbe Länge des Durchmessers und i die auf ihm gemessene Entfernung des Mittelpunktes der Centralellipse von der Axe XX bezeichnet. Man findet leicht, dass jenes $\mathfrak{m}$ nur für die Stücke 2, 3 und 5 einen merklichen Werth erhält; für diese Stücke wurden die Momentenschwerpunkte mit (2)' (3)' und (5)' bezeichnet.

Um den Gesammtschwerpunkt der Momente zu finden, hat man diese nach zwei Richtungen hin, wir wählen die horizontale und verticale, in den betreffenden Schwerpunkten anzubringen und die zugehörigen Seilpolygone zu zeichnen. Dieselben können beide aus dem Kräftepolygon 0' 1' 2' ... 6' mit dem vorläufig willkürlichen Pole C' construirt werden. Die Seiten des einen sind parallel, die des anderen senkrecht zu den Strahlen des Kräftepolygons. Wir haben sie in der Figur mit 0'' I'' II'' .... VII'' und 0''' I''' II''' .... VII''' bezeichnet. Ihre äussersten Seiten laufen parallel zu einander, wie natürlich, da die Momentensumme in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe XX Null ist, das Kräftepolygon 0' 1' 2' ... 6' sich schliesst. Der Gesammt-Momentenschwerpunkt liegt also in unendlicher Entfernung, und wir müssen die Momente in zwei Gruppen theilen und deren Schwerpunkte suchen, um den zu XX conjugirten Durchmesser zu finden. In die erste Gruppe nimmt man wohl am besten die Momente 1', 2', 3' und 4', in die zweite die 5' und 6'. Der Schwerpunkt S' der ersten Gruppe ist der Schnittpunkt der horizontalen und verticalen Linie, welche durch die Schnitte β'' und β''' der Seilpolygonseiten 0'' I'' und IV'' V'', bezw. 0''' I''' und IV''' V''' gezogen werden; und ähnlich findet sich der Schwerpunkt S'' der zweiten Gruppe. Die zu XX conjugirte Axe YY der Centralellipse geht dann parallel zur Verbindungslinie S' S'' durch den Schwerpunkt S.

Um die Längen der in XX und YY liegenden conjugirten Durchmesser zu finden, müssen die Schwungradien der Trägheitsmomente des Profils bezüglich jener Axen construirt werden. Dies ist für die erste Axe durch die vorausgehende Construction fast schon geschehen. Der Abschnitt 0'' 6'' zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygons 0'' I'' II'' .... VII'' auf der Axe XX ist das auf die Basen 4 C und 0' C' reducirte Trägheitsmoment, bezogen auf diese Axe. Dasselbe ist also gleich

$$\mathrm{a.H.H'.}\overline{0''6''},$$

wenn a die Flächenbasis, gleich 2 Centimeter, und H und H' jene Momentenbasen bezeichnen. Das Quadrat des Schwungradius wird folglich, senkrecht gemessene Entfernungen vorausgesetzt,

$$\frac{\mathrm{a.H.H'.}\overline{0''6''}}{\mathrm{a.}\overline{06}} = \frac{\mathrm{H.H'.}\overline{0''6''}}{\overline{06}}.$$

Um diese Division leicht ausführen zu können, haben wir H' gleich der Hälfte der Kräftesumme 0 6 gewählt. Wird folglich $0''6''_1$ in $0''_1$ halbirt, so ist der gesuchte Schwungradius, immer senkrecht gemessene Entfernungen vorausgesetzt,

$$\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{H.}\overline{0''_1 6''}}$$

und leicht zu construiren. Trägt man ihn zu beiden Seiten der Axe XX senkrecht auf diese auf, so schneiden die durch die Endpunkte gezogenen Parallelen zu XX die Endpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ des auf YY liegenden conjugirten Durchmessers ab.

Um die Länge des in XX liegenden conjugirten Durchmessers der Centralellipse zu finden, wenden wir das im § 126 angegebene Verfahren an, indem wir das Trägheitsmoment und daraus den Schwungradius des Profils für die Axe YY suchen. Wir sollten zu diesem Behufe die zu YY conjugirten Durchmesser der Centralellipsen der einzelnen Stücke zeichnen, sie verlängern, bis sie

die Axe Y Y treffen, und für die Schnittpunkte als Mittelpunkte die Trägheitsellipsen construiren, oder wenigstens deren zu Y Y conjugirte Durchmesser, die mit denen der Centralellipsen in einer und derselben geraden Linie liegen. Bezeichnen a und $\mathfrak{a}$ diese halben Durchmesser für die Trägheits- und bezw. Centralellipse und i die in ihrer Richtung gemessene Entfernung des Mittelpunktes der letzteren von Y Y, so ist

$$a^2 = \mathfrak{a}^2 + i^2$$

und folglich als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten $\mathfrak{a}$ und i sind, leicht z[u] construiren. In den Endpunkten dieser Halbdurchmesser a, von denen jeder beliebig auf die ei[ne] oder andere Seite der Axe Y Y getragen werden kann, müssten dann die Kräftesummen, hier d[ie] Flächeninhalte der Stücke, parallel zu Y Y wirkend gedacht werden, worauf in bekannter Weise d[as] Trägheitsmoment derselben zu construiren wäre. Da es sich aber hierbei bloss um die Parallelen z[u] Y Y handelt, zwischen denen die beiden, zu jenem Zwecke nothwendigen Seilpolygone gezeichne[t] werden müssen, so wird man einfacher so verfahren, dass man an jede der Centralellipsen eine zu[r] Axe Y Y parallele Tangente und durch ihren Mittelpunkt eine Senkrechte zu derselben Axe leg[t]. Bezeichnen $\mathfrak{a}'$ und i' die auf letzterer gemessenen Entfernungen des Mittelpunkts der Centralellips[e] von jener Tangente und bezw. von der Axe Y Y, dann a' die auf derselben Linie gemessene En[t]fernung der obigen Parallelen zu Y Y von letzterer Axe, so ist ebenfalls

$$a'^2 = \mathfrak{a}'^2 + i'^2$$

und daher durch Construction eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den Katheten $\mathfrak{a}'$ und i' zu erhalte[n]. Wir haben in Figur 23 diese a' auf die Senkrechten zu Y Y aufgetragen, und zwar auf die ei[ne] oder andere Seite dieser Axe, wie wir es eben betreffs der Deutlichkeit der zu construirenden Sei[l]polygone für besser hielten. Die Endpunkte der aufgetragenen Stücke haben wir mit (1)'', (2)'' . . . (6)'' bezeichnet. Beim erten Stück wird wegen der geringen Grösse von $\mathfrak{a}'$ gegenüber derjenigen von i' der Werth a' fast gleich i' und fällt also (1)'', wenn wir a' auf dieselbe Seite von Y Y auftragen, auf welcher (1) liegt, mit letzterem Punkt zusammen.

Zwischen den durch die letzterhaltenen Punkte zu Y Y gezogenen Parallelen wurde hierauf das Seilpolygon $0^4 I^4 II^4 \ldots VII^4$ aus dem in Y Y liegenden Kräftepolygon $0_1 1_1 2_1 \ldots 6_1$ mit dem Pol C_1, das dem C 0 1 2 3 . . 6 ganz gleich ist, construirt. Die Abschnitte 0''' 1''', 1''' 2''' . . . der auf einander folgenden Seiten jenes Seilpolygons auf der Axe Y Y sind die reducirten statischen Momente bezüglich dieser Axe und sogleich zum Kräftepolygon 0''' 1''' 2''' . . . 6''' zusammengetragen. Für den Pol C''' desselben, dessen Entfernung H''' von der Kräftelinie wieder gleich der halben Kräftesumme, hier also gleich der Hälfte von 0 6 im ersten Kräftepolygon, genommen wurde, construirten wir dann das Seilpolygon $0^5 I^5 II^5 \ldots VII^5$ zwischen denselben Parallelen wie das vorige. Der Abschnitt $0^{IV} 6^{IV}$ zwischen den äussersten Seiten desselben auf der Axe Y Y ist das gesuchte Trägheitsmoment, reducirt auf die Flächenbasis a und die Momentenbasen H und H'''. Es ist also gleich $a . H . H''' . \overline{0^{IV} 6^{IV}}$ und folglich das Quadrat des Schwungradius für senkrecht zu Y Y gemessene Entfernungen:

$$\frac{a . H . H''' . \overline{0^{IV} 6^{IV}}}{a . \overline{0 6}} = \tfrac{1}{2} H . \overline{0^{IV} 6^{IV}} = H . \overline{0_1^{IV} 6^{IV}},$$

wenn 0_1^{IV} in der Mitte von $0^{IV} 6^{IV}$ liegt. Der Schwungradius selbst ist folglich

$$k' = \sqrt{H . \overline{0_1^{IV} 6^{IV}}}$$

und leicht zu construiren. Zwei Parallele zu Y Y auf beiden Seiten dieser Axe, deren senkrechte Entfernungen von ihr gleich k' sind, schneiden auf X X die Enden des gesuchten Durchmessers $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'$ ab.

Durch die beiden conjugirten Durchmesser ist die Centralellipse vollständig bestimmt und kann auf gewöhnliche Weise gezeichnet werden. Anstatt des eben gezeigten Verfahrens, sie zu finden, hätte man auch den Weg einschlagen können, dass man auf ganz dieselbe Weise, wie es zuletzt für

die Axe YY geschehen ist, die Trägheitsmomente und Schwungradien für drei beliebige Axen, die durch den Schwerpunkt S gehen, gesucht hätte. Durch die hiedurch gefundenen 3 Paar parallelen Tangenten ist die Centralellipse auch bestimmt. Wenn man dabei die drei Axen, von denen die eine wieder XX sein möge, unter denselben Winkeln gegeneinander zeichnet, welche die Seiten des Dreiecks mit einander bilden, mit dem man arbeitet, so braucht das Kräftepolygon aus den Flächeninhalten der sechs Stücke nicht dreimal gezeichnet zu werden, sondern man kann die drei zugehörigen Seilpolygone aus dem einen Kräftepolygon C 0 1 2 . . . 6 construiren. Aber das oben gezeigte Verfahren ist wenigstens nicht umständlicher als dieses letztere und hat den Vortheil, dass man unmittelbar zwei conjugirte Durchmesser der Centralellipse erhält.

Aus diesen kann man die Hauptaxen auf bekannte Weise finden und mittelst derselben, behufs Construction des Kerns, Tangenten an die Ellipse, parallel zu gegebenen Richtungen, und deren Berührungspunkte construiren, ohne dass man die Ellipse selbst gezeichnet hat. Dieser Kern wird, wie leicht ersichtlich, ein Sechseck $\delta\varepsilon\zeta\vartheta\varkappa\lambda$, dessen Ecken den Stellungen ab, bc, cd, de, ef und fa der neutralen Axe in bekannter Weise entsprechen.

Centralellipsoid und Kern einiger einfacher Körper.

§ **140. Das Tetraëder** (Fig. 33 Taf. XII). Denkt man sich das Tetraëder ABCD durch Ebenen parallel zu einer Seitenfläche ABC in so dünne Platten zerschnitten, dass man dieselben als materielle ebene Figuren betrachten kann, so folgt aus dem zweiten Satze des § 122 sofort, dass in seinem Centralellipsoid die Verbindungslinie DS der Spitze, welche jener Seitenfläche gegenüber liegt, mit dem Schwerpunkt der letzteren der Stellung jener Parallelebenen conjugirt ist. Noch mehr: da alle jene Platten ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke sind und daher ähnliche und ähnlich liegende Centralellipsen haben, so folgt aus dem vierten Satze des § 122, dass das Central-Ellipsoid von einer durch seinen Mittelpunkt S_0 gelegten, zur Seitenfläche ABC parallelen Ebene nach einer Ellipse geschnitten wird, die jenen ähnlich ist und ähnlich mit ihnen liegt. Desshalb sind zwei conjugirte Durchmesser der letzteren Ellipse, ihrer Richtung nach, sogleich gefunden. Ist $A_0B_0C_0$ das Dreieck, in welchem die durch den Schwerpunkt S_0 des Tetraëders gelegte Parallelebene zu ABC das Tetraëder schneidet, so sind die Halbirungslinie C_0E_0 und die durch S_0 gelegte Parallele F_0G_0 zu A_0B_0 in der Centralellipse des Dreiecks $A_0B_0C_0$ conjugirt und folglich auch in obiger Schnittellipse des Centralellipsoids. DS, C_0E_0 und F_0G_0 sind somit drei conjugirte Durchmesser des letzteren, der Richtung nach. Ihre Grösse ist leicht zu finden.

Bezeichnet g den Flächeninhalt der Seitenfläche ABC, h die Linie DS, so ist die Grösse irgend eines zu ABC parallelen Schnittes des Tetraëders, dessen Entfernung von ABC, auf h gemessen, mit x bezeichnet wird,

$$g_x = g\,\frac{(h-x)^2}{h^2},$$

und daher ist das Quadrat des Schwungradius des Tetraëders für ABC als Momentenebene und für die Richtung DS

$$k^2 = \frac{\int_0^h \frac{g}{h^2}(h-x)^2 x^2\,dx}{\int_0^h \frac{g}{h^2}(h-x)^2\,dx} = \tfrac{1}{10}h^2.$$

Daraus folgt für das Quadrat desjenigen Halbdurchmessers $\mathfrak{b}$ des Centralellipsoids, der auf D S liegt,

$$\mathfrak{b}^2 = k^2 - i^2 = \tfrac{1}{10} h^2 - \tfrac{1}{16} h^2 = \tfrac{3}{80} h^2 = (0{,}1937\, h)^2.$$

Aus obiger Entwicklung folgt zugleich das Quadrat des Schwungradius $\mathfrak{a}$ des Tetraëders für die Momentenebene D C E und für die Richtung A B oder $F_0 G_0$:

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{1}{10} (\tfrac{1}{2} a)^2 = \tfrac{1}{40} a^2 = (0{,}1581\, a)^2,$$

wo a die Länge der Kante A B bezeichnet. Jenes $\mathfrak{a}$ ist zugleich der auf $F_0 G_0$ liegende Halbdurchmesser. Auf $A_0 B_0 = a_0 = \tfrac{3}{4} a$ bezogen, wird

$$\mathfrak{a}^2 = \tfrac{2}{45} a_0^2;$$

$\mathfrak{a}$ verhält sich also zu dem auf $F_0 G_0$ liegenden Halbdurchmesser der Centralellipse des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$, dessen Quadrat nach § 133 gleich $\tfrac{1}{24} a_0^2$ ist, wie $\sqrt{16} : \sqrt{15}$. Dasselbe Verhältniss müssen nach Obigem die beiden auf $C_0 E_0$ liegenden Durchmesser des Centralellipsoids des Tetraëders und der Centralellipse des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$ zu einander haben, und da das Quadrat des letzteren nach § 133 gleich $\tfrac{1}{18} h_0'^2$ ist, mit h_0' die Halbirungslinie $C_0 E_0$ bezeichnet, so ist der dritte Halbdurchmesser des Ellipsoids, ins Quadrat erhoben,

$$\mathfrak{c}^2 = \tfrac{1}{18} h_0'^2 \times \tfrac{16}{15} = \tfrac{8}{135} h_0'^2,$$

oder auf $C E = h' = \tfrac{4}{3} h_0'$ bezogen,

$$\mathfrak{c}^2 = \tfrac{1}{30} h'^2 = (0{,}1826\, h')^2.$$

Bekanntlich kann man das Tetraëder noch auf andere Weise in Parallelschnitte zerlegen, deren Schwerpunkte alle in einer geraden Linie liegen, durch Ebenen nämlich, welche parallel zu zwei Gegenseiten A B = a und C D = b sind (s. § 99). Jener geometrische Ort für die Schwerpunkte der Schnitte ist die Verbindungslinie der Mitten J und E der Gegenseiten und daher ist J E in dem Centralellipsoid des Tetraëders der Stellung jener Parallelebenen conjugirt. Noch mehr: die Parallelschnitte sind Parallelogramme, deren Seiten sämmtlich zu A B bezw. C D parallel sind. Die Centralellipsen derselben haben folglich alle ein Paar conjugirter Durchmesser, deren Richtungen mit denen der Gegenseiten A B und C D übereinstimmen. Desshalb sind die drei durch den Schwerpunkt S_0 des Tetraëders gezogenen Geraden: J E, $F_0 G_0$ und $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1'$, von welchen letztere parallel zu C D ist, conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids desselben, der Richtung nach. Auch ihre Länge ist leicht gefunden. Die Flächeninhalte der Parallelogramme, in welchen die zu A B und C D parallelen Ebenen das Tetraëder schneiden, sind nach § 99 den Quadraten derjenigen Ordinaten eines über der Kante B D beschriebenen Halbkreises proportional, deren Fusspunkte die Schnittpunkte der Parallelebenen und der Kante B D sind. Jene Flächeninhalte sind also auch den Producten aus den beiden Abschnitten, in welche obige Schnittpunkte die Kante B D theilen, proportional und letztere Abschnitte denjenigen, welche die Parallelebenen auf J E machen. Bezeichnet also z die Entfernungen der Schnittpunkte der Parallelebenen auf J E von der Mitte S_0 und c die Länge von J E selber, so sind jene Parallelogramme proportional den Producten $(\tfrac{1}{2} c - z)\,(\tfrac{1}{2} c + z)$ oder proportional mit $(\tfrac{1}{4} c^2 - z^2)$. Für gleiche z sind folglich jene Parallelogramme zu beiden Seiten von S_0 gleich gross und der Schwungradius des Trägheitsmomentes des Tetraëders für die zu jenen Schnittebenen parallele, durch S_0 gelegte Momentenebene und für die Richtung J E findet sich aus:

$$\mathfrak{c}_1^2 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}c} (\tfrac{1}{4} c^2 - z^2)\, z^2\, dz}{\int_0^{\frac{1}{2}c} (\tfrac{1}{4} c^2 - z^2)\, dz} = \tfrac{1}{20} c^2 = (0{,}2236\, c)^2.$$

Dieses $\mathfrak{c}_1$ ist zugleich der auf J E liegende Halbdurchmesser des Centralellipsoids.

Der auf $F_0 G_0$ liegende Halbdurchmesser $\mathfrak{a}_1$ wird erhalten, wenn man das Tetraëder durch Ebenen parallel zu CD und JE in dreieckige Platten zerschneidet, deren Grösse auf jeder Seite der Ebene CDE proportional den Quadraten der Entfernungen der Schnittebenen von den Endpunkten A, bezw. B sind. Messen wir diese Entfernungen in der Richtung von AB oder $F_0 G_0$ und nennen wir sie y, so ist

$$\mathfrak{a}_1^2 = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}a} (\frac{1}{2}a - y)^2 y^2 dy}{\int_0^{\frac{1}{2}a} (\frac{1}{2}a - y)^2 dy} = \frac{1}{40} a^2 = (0,1581\, a)^2,$$

also übereinstimmend mit dem vorhin schon gefundenen Halbdurchmesser $\mathfrak{a}$, der ebenfalls in $F_0 G_0$ liegt.

Auf dieselbe Weise, wie soeben $\mathfrak{a}_1$, findet man für den Halbdurchmesser $\mathfrak{b}_1$ in $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1'$

$$\mathfrak{b}_1^2 = \frac{1}{40} b^2 = (0,1581\, b)^2.$$

In der Ebene DCE liegen die zwei Paar conjugirter Durchmesser $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$. Da dieselben auch der Schnittellipse jener Ebene mit dem Ellipsoid angehören, so muss die Relation zwischen ihnen bestehen:

$$\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2,$$

und in der That überzeugt man sich leicht, dass dies der Fall ist, wenn man nur die Längen c und h durch b und h′ ausdrückt.

Der Kern des Tetraëders ist, wie sofort ersichtlich, wieder ein Tetraëder, dessen Ecken auf den Verbindungslinien des Schwerpunkts S_0 mit den Ecken des gegebenen Tetraëders liegen. Bezeichnet allgemein h die Verbindungslinie einer der Ecken A, B, C oder D des Tetraëders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche, ferner $i = \frac{1}{4} h$ die Entfernung dieses letzteren Punktes vom Schwerpunkte S_0 und endlich $\mathfrak{b}$ den auf h liegenden Halbdurchmesser des Centralellipsoids, so ist die Entfernung der in h liegenden Ecke des Kern-Tetraëders von S_0 gleich

$$\frac{\mathfrak{b}^2}{i} = \frac{\frac{3}{80} h^2}{\frac{1}{4} h} = \frac{3}{20} h.$$

Auf die Entfernung $s = \frac{3}{4} h$ des Schwerpunktes S_0 von der betreffenden Tetraëder-Ecke bezogen, wird letzterer Ausdruck gleich $\frac{1}{5} s$. Daraus folgt, dass der Kern $\alpha\beta\gamma\delta$ ein mit dem gegebenen ähnliches und ähnlich liegendes Tetraëder ist, dessen Dimensionen fünfmal so klein sind, als die des gegebenen. Seine Seitenflächen sind parallel den Seitenflächen des letzteren und im Centralellipsoid die Polarebenen von Punkten, die mit den betreffenden Ecken des gegebenen Tetraëders symmetrisch zum Schwerpunkt desselben liegen. Auf ihnen bewegt sich der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte, wenn sich die Neutralebene um jene Tetraëder-Ecken dreht. Eben so sind die Kanten des Kerns denen des gegebenen Tetraëders parallel. Die Kante $\gamma\delta$ z. B. ist im Centralellipsoid die Polare einer Linie, welche mit der Gegenkante AB parallel und symmetrisch zum Schwerpunkt S_0 liegt. Auf ihr bewegt sich der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte, während sich die Neutralebene um die Kante AB dreht. Dies geht auch direct aus dem oben gefundenen Werth für den Halbdurchmesser $\mathfrak{c}_1$ hervor, den wir bei der zweiten Zerlegungsart des Tetraëders erhielten.

§ 141. **Prisma und Cylinder mit parallelen Endflächen.** — Denkt man sich ein Prisma oder einen Cylinder der bezeichneten Art durch Ebenen parallel zu den Endflächen in dünne Platten zerschnitten, so sieht man sogleich, dass in seinem Centralellipsoid die Stellung jener Parallelebenen und die zu den Seitenkanten parallele Verbindungslinie der Schwerpunkte der Endflächen, die Schwerpunktaxe, conjugirt sind. Alle Schnittfiguren haben congruente und ähnlich liegende Centralellipsen, woraus folgt, dass die Ellipse, in welcher die durch den Schwerpunkt des Prismas oder

Cylinders gehende Parallelebene das Centralellipsoid schneidet, dieselbe Grösse, Gestalt und Lage haben muss. Denn das Trägheitsmoment des Prismas (Cylinders) ist in Bezug auf irgend eine durch die Schwerpunktsaxe gehende Momentenebene das nämliche. wie das von irgend einem der Parallelschnitte, in welchem man sich die Masse des ganzen Körpers concentrirt denkt, indem man sie gleichmässig über ihn ausbreitet. Es folgt dies sofort daraus, dass man sich das ganze Prisma oder den Cylinder in dünne, zur Schwerpunktsaxe parallele, materielle Linien von gleicher Länge zerlegt denken kann.

Die Länge desjenigen Durchmessers des Centralellipsoids, welcher in der Schwerpunktsaxe liegt, ist leicht gefunden. Bezeichnet g den Flächeninhalt der End- sowie der durchweg gleichen Schnittflächen, und x die auf der Schwerpunktsaxe gemessene Entfernung einer Schnittfigur vom Schwerpunkt des Prismas oder Cylinders, endlich h die Länge der Schwerpunktsaxe, so ist das Quadrat jenes Halbdurchmessers

$$a^2 = \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} g x^2 dx}{\int_0^{\frac{h}{2}} g dx} = \tfrac{1}{12} h^2 = (0{,}2887\, h)^2.$$

Dieser Werth stimmt mit demjenigen überein, welchen man für den in derselben Richtung liegenden Halbdurchmesser der Centralellipse eines Parallelogramms erhält, in dem irgend eine durch die Schwerpunktsaxe gelegte Ebene das Prisma oder den Cylinder schneidet; diese Uebereinstimmung kann übrigens auch leicht direct erwiesen werden.

Der Kern des Prismas oder Cylinders ist eine Doppelpyramide, bezw. ein Doppelkegel mit einer Basis, welche der Kern der Schnittfigur in der zu den Endflächen parallelen Ebene ist, welche durch den Schwerpunkt gelegt wird. Die beiden Spitzen liegen in der Schwerpunktsaxe und auf beiden Seiten jener Ebene gleichweit von ihr entfernt. Ihre längs der Schwerpunktsaxe gemessene Entfernung von letzterer Ebene ist

$$\frac{\tfrac{1}{12} h^2}{\tfrac{1}{2} h} = \tfrac{1}{6} h.$$

Die ganze Höhe des Kerns, von Spitze zu Spitze gemessen, nimmt also das mittlere Drittheil der Schwerpunktsaxe ein.

§ **142. Pyramide und Kegel.** — Indem man sich diese Körper durch Ebenen, parallel zu ihrer Grundfläche, in dünne Platten zerschnitten denkt, sieht man leicht, dass in ihrem Centralellipsoid der Stellung jener Parallelebenen die Gerade conjugirt ist, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet, und die wir wieder kurz die Schwerpunktsaxe nennen. Alle Schnittfiguren jener Parallelebenen mit der Pyramide oder dem Kegel sind ähnlich und ähnlich liegend, und haben desshalb auch ähnliche und ähnlich liegende Centralellipsen. Dieselbe Gestalt und Lage hat folglich auch die Ellipse, in welcher eine parallel zur Grundfläche liegende Ebene, die durch den Schwerpunkt des Körpers oder Mittelpunkt des Centralellipsoids geht, das letztere schneidet. Um diese Ellipse zu kennen, reicht es folglich aus, einen einzigen Halbdurchmesser von ihr zu bestimmen, also das Trägheitsmoment oder den Schwungradius der Pyramide oder des Kegels in Bezug auf irgend eine durch die Schwerpunktsaxe gehende Ebene zu finden. Diese Ebene schneidet alle Schnittfiguren der obigen Parallelebenen in parallelen Linien, denen in den Centralellipsen der Schnittfiguren parallele Durchmesser conjugirt sind. Die Längen der letzteren sind den Entfernungen der Schnittfiguren von der Spitze der Pyramide oder des Kegels proportional. Bezeichnet a die halbe Länge desjenigen von diesen Durchmessern, der in der Grundfläche liegt, g den Inhalt der letzteren, dann x

Die in derselben Richtung gemessene Höhe des Kerns ist daher

$$\tfrac{3}{20}h + \tfrac{1}{20}h = \tfrac{1}{5}h.$$

Bei einer Pyramide ist die Grundfläche des Kerns ein Polygon von eben so viel Ecken, als die Grundfläche der Pyramide hat. Jede Ecke entspricht in bekannter Weise einer Seitenfläche der letzteren. Jede Seite der Grundfläche ist im Centralellipsoid die Polare einer Linie, welche einer Seitenkante der Pyramide parallel ist und mit ihr symmetrisch gegen den Schwerpunkt liegt. Eine gleiche Beziehung findet statt zwischen den Seitenkanten des Kerns und den Seiten der Grundfläche der Pyramide. Aehnliche Verhältnisse ergeben sich beim Kegel.

§ **143. Das Ellipsoid.** — Aus dem zweiten Satze des § 122 folgt sofort, dass eine Ebene und eine gerade Linie, die in einem gegebenen Ellipsoid conjugirt sind, dieselbe Beziehung in dessen Centralellipsoid haben. Nennen wir g den Flächeninhalt der Ellipse, in welcher eine Ebene E, die durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gelegt wird, das letztere schneidet, a die Länge des zur Ebene E conjugirten Halbdurchmessers des gegebenen Ellipsoids, x die auf ihm gemessene Entfernung einer Parallelebene E_x zu E, die das Ellipsoid in einer der g ähnlichen Ellipse mit dem Flächeninhalt g_x schneidet, so ist

$$g_x = g\,\frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

und daher das Quadrat des Schwungradius des Ellipsoids für die Momentenebene E und für die Richtung von a

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{\int_0^a g\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}\,x^2\,dx}{\int_0^a g\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}\,dx} = \tfrac{1}{5}a^2 = (0{,}4472\,a)^2.$$

Dieses $\mathfrak{a}$ ist zugleich der Halbdurchmesser, welcher der Ebene E im Centralellipsoid conjugirt ist. Da das nämliche Resultat für alle möglichen Lagen der Ebene E und ihres conjugirten Durchmessers erhalten wird, so folgt, dass ein Ellipsoid und sein Centralellipsoid concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Körper sind, deren Dimensionen sich verhalten wie $1 : \sqrt{\tfrac{1}{5}}$.

Der Kern des Ellipsoids ist auch wieder ein Ellipsoid; für eine Neutralebene, die parallel zur Ebene E das gegebene Ellipsoid berührt, liegt der entsprechende Angriffspunkt der Resultante der Kräfte auf dem zu E conjugirten Durchmesser a und zwar in der Entfernung

$$\frac{\tfrac{1}{5}a^2}{a} = \tfrac{1}{5}a$$

vom Mittelpunkt des Ellipsoids. Es ist also der Kern ein Ellipsoid, das ebenfalls mit dem gegebenen concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend ist, dessen Dimensionen aber fünfmal so klein als die des gegebenen Ellipsoids sind.

XI. Abschnitt.

Anwendungen.

Kette und Bogen.

§ 144. Kette und Bogen. Seien $P_1, P_2 .. P_5$ (Fig. 34[b] Taf. XIII) parallele, vertical abwärts gerichtete Kräfte, Lasten, welche in Fig. 34[a] zum Kräftepolygon vereinigt wurden; für den beliebigen Pol C desselben sei das Seilpolygon 0 I II . . V VI construirt. Nimmt man die Knotenpunkte I, II . . . dieses letzteren als Angriffspunkte der Kräfte P, und denkt man sich diese Punkte durch vollkommen biegsame Linienstücke (Seil- oder Kettenstücke) verbunden, während die erste und letzte Seilpolygonseite, von derselben Beschaffenheit wie die anderen, in den Punkten A, B befestigt sind, so erhält man eine Anordnung, welche wir kurz „Kette" nennen wollen.

Würde man den Pol C auf der anderen Seite der Kräftelinie 0 5 genommen haben, so würde das Seilpolygon seine convexe Seite nach aufwärts kehren. Die Linien, durch welche man die Knotenpunkte derselben sich verbunden denken könnte, müssten als starr angenommen werden, und wenn wiederum die erste und letzte Polygonseite auf zwei Fixpunkte A und B gestützt würden, so würde man eine Anordnung bekommen, die kurz „Bogen" genannt werden soll, und für welche der Gewölbbogen, bei dem das Seilpolygon in die sog. Mitteldruckslinie übergeht, als Beispiel angeführt werden möge (vgl. § 32).

Die Strahlen 0C, 1C . . . 5C des Kräftepolygons repräsentiren bekanntlich die Spannungen in den Seilpolygonseiten 0 I, I II . . . V VI, hier also die Spannungen der Seil- oder Kettenstücke 0 I, I II . . . V VI der Grösse und Richtung nach. Speciell geben also der erste und letzte Strahl 0C und 5C die Einwirkungen, welche die Fixpunkte A und B von den dort aufgeführten Seilstücken zu erleiden haben, und also auch auf dieselben ausüben. Zerlegt man jede dieser Spannungen in eine horizontale und verticale Componente, so werden die ersteren alle einander gleich, nämlich gleich der Senkrechten CU, welche im Kräftepolygon vom Pol auf die Kräftelinie gefällt wird. Die verticalen Componenten sind: für das Stück 0 I gleich U0, für I II gleich U1, für II III gleich U2 etc., endlich für V VI gleich U5. Sie sind also für irgend eine Stelle der Kette gleich der Summe der Verticalkräfte P, welche zwischen ihr und dem tiefsten Punkt der Kette liegen, vorausgesetzt, dass man sich diejenige Verticalkraft P, welche an diesem Punkte selbst thätig ist, so in zwei Theile getheilt denkt, wie es durch die Senkrechte CU im Kräftepolygon geschieht, und den einen dieser Theile zur einen Seite der Kette rechnet, den andern Theil zur anderen Seite derselben. Die Horizontal- und Verticalcomponenten der Einwirkungen, welche in den Fixpunkten A und B stattfinden, sind natürlich gleich denen der Spannungen in den Stücken 0 I und V VI, also erstere gleich CU und letztere gleich U0 und bezw. U5, wenn man bloss ihre absolute Grösse ins Auge fasst. Ihr Sinn ergibt sich leicht.

Dieselben Auseinandersetzungen, wie wir sie eben für die Kette gegeben haben, können unmittelbar auf den Bogen übertragen werden. Die Zugspannungen verwandeln sich einfach in Druckspannungen.

Wenn man bei derselben Lage der Kräfte $P_1, P_2 .. P_5$ statt des Fixpunktes B einen anderen, in derselben Verticallinie gelegenen B' nimmt, an dem die Kette aufgehängt sein soll, so ändert sich natürlich die Gestalt der letzteren, und es ist leicht zu zeigen, wie die neue Form aus der ursprünglichen A I II ... V B abgeleitet werden kann. Denkt man sich die Resultante der Kräfte $P_1, P_2 .. P_5$ in zwei Componenten zerlegt, welche in den durch die Fixpunkte A, B gelegten Verticallinien liegen, so erhält man dieselben, indem man die Schlusslinie AB des Seilpolygons 0 I II .. V VI zieht und durch den Pol C des Kräftepolygons eine Parallele CT dazu. Dieselbe theilt die Resultante 05 in die gesuchten Componenten 0T und T5. Diese Componenten müssen dieselben bleiben, wo auch der Fixpunkt B' in der durch B gezogenen Verticallinie angenommen werden mag. Aber da das neue Seilpolygon durch den neuen Fixpunkt hindurchgehen muss, so ändert sich seine Schlusslinie, sie wird AB' statt AB. Eine zu ihr parallel gezogene Linie, welche durch den Pol des zugehörigen Kräftepolygons hindurchgeht, muss zugleich den Punkt T enthalten, und dadurch ist ihre Lage völlig bestimmt. Wo auf dieser Parallelen TN der Pol des neuen Kräftepolygons angenommen werden will, ist von vorn herein ins Belieben gestellt. Er wird erst bestimmt, wenn irgend eine der Seiten des neuen Polygons, etwa gleich die erste, 0'I', die auch durch den Fixpunkt A hindurchgeht, angenommen wird, oder wenn seine Entfernung von der Kräftelinie, die Momentenbasis, vorgeschrieben ist. Im ersteren Falle wird der neue Pol C' der Durchschnitt der zu 0'I' durch 0 gezogenen Parallelen mit der vorhin erhaltenen Linie TN.

Man hat jetzt die Aufgabe, zu demselben Kräftepolygon 0 1 2 .. 5 für einen neuen Pol C' ein neues Seilpolygon aus dem alten zu construiren. Das geschieht nach dem Satze des § 29, welcher sagt, dass sich die gleichvielten Seiten der Seilpolygone auf einer und derselben Parallelen zur Verbindungslinie der beiden Pole schneiden. Diese Parallele AM ist in unserem Fall durch den Fixpunkt A zu legen, in dem sich die ersten Seiten schneiden. Verlängert man folglich die Seiten I II, II III ... VB des alten Seilpolygons, bis sie die Linie AM in den Punkten I'', II'' .. V'' schneiden, so gehen durch diese Punkte die Seiten I' II', II' III' ... V'B' des neuen Seilpolygons hindurch und können also leicht gezogen werden.

Es versteht sich von selbst, dass die durchweg gleichgrossen Horizontalcomponenten der Spannungen in der neuen Kette gleich C'U' werden und die Verticalcomponenten derselben jetzt von dem Punkte U', statt U zu rechnen sind. Eben so leicht ist zu ersehen, dass und wie die vorstehenden Betrachtungen dazu angewendet werden können, um bei gegebenen Kräften $P_1, P_2 ... P_5$ und gegebener Lage derselben die Kette, an der sie thätig sind, so zu construiren, dass sie durch zwei gegebene Fixpunkte A, B' hindurchgeht. Nachdem man aus den gegebenen Kräften das Kräftepolygon 0 1 2 .. 5 construirt und einen beliebigen Pol C desselben angenommen hat, zeichnet man das zugehörige Seilpolygon, dessen erste Seite man sogleich durch den einen Fixpunkt A hindurchlegen kann. Für eine durch den zweiten Fixpunkt B' hindurchgehende Verticale zeichnet man alsdann die Schlusslinie AB jenes Seilpolygons und erhält mittelst der zu ihr durch den Pol C gezogenen Parallelen den Punkt T im Kräftepolygon. Durch diesen legt man dann die Parallele TN zur Verbindungslinie AB' der gegebenen Fixpunkte und verfährt nun weiter genau so, wie es oben angegeben wurde.

§ 145. Mitteldruckslinie und Horizontalschub in Gewölbbögen. — Die letzte Aufgabe kommt, in etwas modificirter Form, insbesondere bei Gewölbbögen vor, eigentlich bei der Construction der Mitteldruckslinie der einen Hälfte derselben (vgl. § 32), wenn diese so zu zeichnen ist, dass sie durch den Scheitel A (Fig. 36 Taf. XIV) des Gewölbes und durch einen bestimmten Punkt B' des Widerlagers hindurchgeht. Die Kräfte $P_1, P_2 ... P_{10}$ sind die Gewichte der Lamellen, in

welche man sich das Gewölbe nebst der darauf liegenden Belastung zerschnitten denken kann; sie gehen durch die Schwerpunkte dieser Lamellen hindurch. Nachdem man aus diesen Kräften das Kräftepolygon 0 1 2 ... 10 construirt hat, nimmt man einen beliebigen Horizontalschub H gleich 0 C im Scheitel an, und construirt hiefür, also für den Pol C im Kräftepolygon, ein Seilpolygon A I II ... XI. Dasselbe wird natürlich im Allgemeinen nicht durch den gegebenen Punkt B′ des Widerlagers hindurchgehen und gibt dann eben dadurch zu erkennen, dass man den Horizontalschub nicht richtig gewählt hat. Bei der richtigen Grösse H′ gleich 0 C′ desselben, also bei der Lage des Poles C′ muss die letzte Seite des Seilpolygons durch B′ gehen.

Nun schneiden sich die gleichvielten Seiten der zu C und C′ gehörigen Seilpolygone auf einer zu C C′ parallelen Linie, welche durch den ihnen gemeinschaftlichen Punkt I hindurchgeht, also auf der Scheiteltangente A D. Sucht man daher die Schnittpunkte II″, III″ ... X″ der Polygonseiten II III, III IV ... X B mit jener Linie, so geht zunächst die letzte Seite X′ X I′ des neuen Polygons durch die Punkte X″ und B′ hindurch und ist folglich bestimmt. Eine Parallele zu ihr durch den Punkt 10 im Kräftepolygon schneidet auf der Horizontalen durch den Anfangspunkt 0 desselben den richtigen Horizontalschub 0 C′ ab. Das zu diesem gehörige Seilpolygon oder die Drucklinie A I II′ III′ ... X′ B′ ist dann leicht mittelst der übrigen Punkte IX″, VIII″, VII″ ... II″ zu ziehen.

Der Balken.

§ 146. Der Balken und die von aussen auf ihn einwirkenden Kräfte. — In den folgenden Paragraphen werden wir uns mit Trägern beschäftigen, die eine verticale Längs-Symmetrieebene besitzen, oder welche, wie man sich häufig kürzer ausdrückt, in einer Verticalebene liegen. Mit ihren beiden Enden, und nur mit diesen, sollen dieselben auf Unterstützungspunkten, die sich in gleicher Höhe befinden, frei aufliegen, so dass auf diese Stützpunkte nur vertical abwärts gerichtete Drückungen ausgeübt werden können. Die Belastung dieser Träger werden wir bald als stetig über dieselben vertheilt, bald als in einzelnen Punkten concentrirt voraussetzen, welch' letzteres z. B. bei der Belastung einer Brücke durch einen Eisenbahnzug, der in den Berührungspunkten der einzelnen Räder auf ihr ruht, der Fall ist.

In unseren Figuren werden wir die Träger als prismatisch, von durchweg gleichem Querschnitt, voraussetzen. Solche Träger nennt man einfach „Balken“. Doch lassen sich die folgenden Betrachtungen leicht auch auf Träger von verschiedenen Querschnitten anwenden.

§ 147. Balken, auf den bloss concentrirte Kräfte wirken. — Für den Fall, dass bloss concentrirte Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_4$ (Fig. 15 Taf. IV) auf einen Balken wirken, haben wir alles, was über deren Zusammensetzung, dann Zerlegung in die Auflagerdrücke, sowie über die Summe der ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräfte und endlich über die Drehungsmomente derselben um irgend einen Punkt, oder eigentlich um eine Horizontalaxe des Querschnitts zu sagen ist, bereits in den §§ 39 und 54 abgehandelt, auf welche hier ausdrücklich verwiesen wird.

§ 148. Balken, auf den bloss eine stetig vertheilte Last wirkt. — Wenn auf einem Balken A B (Fig. 35, Taf. XIII) eine stetig vertheilte Last liegt, so wird das Gesetz der Vertheilung derselben am besten dadurch ausgedrückt, dass man über dem Balken, als über einer Abscissenaxe, eine Curve a c b zeichnet, deren Ordinaten je gleich der Belastung pro Längeneinheit sind, welche auf diejenige Stelle des Balkens trifft, wo sich der Fusspunkt der Ordinate befindet. Diese Curve nennt man kurz „Belastungscurve“; ihr Flächeninhalt, d. h. die zwischen ihr, der Abscissenaxe und den äussersten Ordinaten enthaltene Fläche, in der passenden Einheit ausgedrückt, ist offenbar gleich der Gesammtbelastung des Balkens. Die auf irgend ein Stück desselben treffende Last ist gleich derjenigen Fläche, welche zwischen den beiden Endordinaten dieses Stückes einerseits und zwischen der Belastungscurve und der Abcissenaxe andererseits gelegen ist. Kurz, man

kann sich vorstellen, dass der ganze Balken AB die überall gleichdicke und homogene, materielle Fläche AacbB, deren Gewicht gleich der Gesammtbelastung ist, zu tragen habe.

Das Seilpolygon für eine solche stetig vertheilte Belastung geht natürlich in eine Curve, die Seilcurve über. Man erhält dieselbe annähernd, wenn man sich den Balken in eine grössere Anzahl gleicher Stücke getheilt denkt und die auf diese treffenden Belastungen in ihren Schwerpunkten vereinigt. Diese Belastungen werden durch die den Theilen des Balkens entsprechenden Stücke der Fläche AacbB dargestellt, und ihre Schwerpunkte liegen in den Verticalen, welche durch die Schwerpunkte jener Flächenstücke hindurchgehen. Für den Fall, dass man die Theile des Balkens klein genug nimmt, können die entsprechenden Flächenstücke als Trapeze betrachtet und darf angenommen werden, dass deren Schwerpunkt in der Verticallinie liegt, welche mitten zwischen ihren verticalen Parallelseiten gezogen wird. Und wenn man, wie schon bemerkt, den Balken in gleichgrosse Stücke theilt, so sind die mittleren Parallelen der Trapeze deren Inhalten proportional, und also auch proportional den Belastungen, welche in ihnen concentrirt werden.

In Fig. 35 theilten wir die Balkenlänge in 10 gleiche Theile, deren Mitten mit 1, 2 ... 10 bezeichnet wurden. In den durch sie hindurchgehenden Verticalen dachten wir uns Kräfte P_1, P_2 ... P_{10} wirken, proportional mit den in ihnen liegenden Ordinaten der Belastungscurve. Wir nahmen je ein Viertel dieser Ordinaten und trugen sie zu dem Kräftepolygon 0 1 2 3 ... 10 in Figur 35[a] zusammen. Für den Pol C desselben construirten wir dann auf die bekannte Weise das Seilpolygon 0 I II ... X XI, hier die angenäherte Seilcurve.

Für diese gilt nun alles das, was in den §§ 39 und 54 in Bezug auf das Seilpolygon gesagt wurde. Wenn man die Schlusslinie A′B′ zieht, und durch den Pol C des Kräftepolygons die Parallele CT dazu, so theilt diese die Kräftesumme 0 10 in die beiden Auflagerdrücke 0 T und T 10. Wenn diese beiden Kräfte im entgegengesetzten Sinne in den Unterstützungspunkten am Balken angebracht werden, so wird dieser dadurch ins freie Gleichgewicht gesetzt; das Kräftepolygon T 0 1 2 ... 9 10 T sowohl, als das Seilpolygon A′ I II ... IX X B′ A′ schliessen sich.

Für irgend einen Querschnitt y des Balkens erhält man die Summe der ausser ihm, und zwar links von ihm gelegenen Kräfte, wenn man durch den Punkt η, wo die durch ihn gelegte Verticale die Seilcurve trifft, eine Tangente $\eta\alpha$ an diese zieht und durch den Pol des Kräftepolygons eine Parallele C 7 dazu. Die Strecke T 7, welche zwischen dem Schnittpunkt der letzteren mit der Kräftelinie und dem Theilungspunkt T, dem Anfangspunkt des oben genannten geschlossenen Kräftepolygons liegt, ist, in dem Sinne von letzterem zu ersterem Punkt genommen, die gesuchte Summe oder die „Transversalkraft" des Querschnitts y. Ihre Lage ist dadurch bestimmt, dass sie durch den Schnittpunkt α der obigen Tangente an die Seilcurve mit der Schlusslinie A′B′ hindurchgehen muss, durch den Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten B′A′ und $\eta\alpha$. — Für die andere, rechte Seite des Querschnitts erhält man die genau gleiche, aber in derselben durch α gehenden Verticalen entgegengesetzt liegende Transversalkraft, weshalb wir in der Folge immer nur von einer Seite des Querschnitts sprechen wollen, von derjenigen, von welcher her die Kräfte gezählt und im Kräftepolygon aufgetragen werden. — Die grössten Werthe für die Transversalkräfte geben offenbar die Querschnitte über den Auflagerpunkten A und B. Diese Werthe sind T0 und bezw. T 10.

Das Gesammtdrehungsmoment der ausserhalb des Querschnitts y wirkenden Kräfte um einen Punkt oder vielmehr um eine Horizontalaxe in diesem Querschnitt wird durch den Abschnitt mη repräsentirt, welcher zwischen der Schlusslinie A′B′ und der Seilcurve auf der Verticalen liegt, welche durch den Querschnitt hindurchgeht. Es ist auf eine Momentenbasis, gleich der senkrechten Entfernung des Poles C im Kräftepolygon von der Kräftelinie, reducirt. Den gefährlichen Querschnitt, in welchem das Drehungsmoment der ausser ihm liegenden Kräfte am grössten ist, findet man, indem man eine Tangente parallel zur Schlusslinie A′B′ an die Seilcurve legt. Der gesuchte

und hat dann schliesslich nur die beiden Resultate einfach zu einander hinzuzufügen. So wurde, wie schon in § 148 beschrieben, in Fig. 35 aus der stetig vertheilten Belastung das Kräftepolygon 0 1 2 ... C und das Seilpolygon A' I II ... B' construirt. Eben so wird man hierauf die concentrirten Kräfte in ein Kräftepolygon 0' 1' 2' 3' 4' zusammentragen und den Pol C'' desselben, der gleichen Momentenbasis halber, in derselben Entfernung von der Kräftelinie annehmen, wie den Pol C im ersten Kräftepolygon, sonst aber vorläufig beliebig. Zeichnet man alsdann das zugehörige Seilpolygon A' I'' II'' ... B'' und dessen Schlusslinie A' B'', sowie die Parallele C'' T' dazu, so folgt: der gesammte Auflagerdruck in A ist 0 T + 0' T', der in B gleich T 10 + T' 4'. Von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Sinne sind die Auflager-Reaktionen dortselbst. Letztere, an dem Balken angebracht, setzen ihn ins freie Gleichgewicht. — Für irgend einen Querschnitt y ist die Summe der ausser ihm thätigen Kräfte zusammengesetzt aus den beiden Componenten: T 7, welche durch den Durchschnittspunkt α, und T' 3', welche durch den Durchschnittspunkt α'' der betr. äussersten Seilpolygonseiten hindurchgeht. Um diese Componenten mit einander zu verbinden, construirt man das Kräftepolygon T 7 𝔟 C aus ihnen, indem man 7 𝔟 gleich T' 3' macht, und alsdann das zugehörige Seilpolygon $0 \alpha \beta \gamma$, durch dessen Schnittpunkt γ der äussersten Polygonseiten die fragliche Resultante hindurchgehen muss. Diese Construction würde selbstverständlich die nämliche bleiben, wenn die beiden Schnittpunkte α und α'' auf verschiedene Seiten des Balkens fallen würden, wie dies möglich ist. Die Componenten würden dann entgegengesetzten Sinn haben und müssten subtrahirt werden, um ihre Resultante zu erhalten.

Das gesammte reducirte Drehungsmoment der ausserhalb des Querschnitts y thätigen Kräfte ist gleich der Summe der Abschnitte m η und m'' η'', welche auf der durch ihn gezogenen Verticalen zwischen den Schlusslinien und bezw. der Seilcurve und dem Seilpolygon liegen. Der gefährliche Querschnitt liegt da, wo diese Summe ein Maximum wird. Um diese Summirung der Abschnitte leicht vornehmen und damit den Maximalmomenten-Querschnitt aufsuchen zu können, ist es vortheilhaft, statt des Polygons A' I'' II'' ... B'' ein anderes zu zeichnen, dessen Schlusslinie mit A' B' zusammenfällt. Dies kann nach § 144 leicht geschehen. Zieht man durch den Punkt T' des Kräftepolygons 0' 4' C'' eine Parallele T' C' zu A' B', und nimmt man darin den Punkt C' so an, dass er von der Kräftelinie dieselbe Entfernung, gleich der Momentenbasis, hat, wie die Pole C'' und C, so ist 0' 4' C' das neue Kräftepolygon und das zugehörige Seilpolygon A' I' II' ... B' leicht zu zeichnen. Man kann dabei den Satz benützen, dass sich seine und die gleichvielten Seiten des Polygons A' I'' II'' ... B'' auf der durch A' gehenden Verticalen schneiden müssen. Nun repräsentirt der Abschnitt $\eta' \eta$ zwischen der Seilcurve und dem Seilpolygon auf der durch den Querschnitt y gezogenen Verticalen das gesammte reducirte Drehungsmoment der ausser ihm wirkenden Kräfte; und man findet mit dem Zirkel leicht die Stelle, wo dieser Abschnitt ein Maximum wird, d. h. wo der gefährliche Querschnitt liegt. Als Anhaltspunkt hiefür mag die Bemerkung dienen, dass derselbe nothwendig immer zwischen die Maximalmomenten-Querschnitte, welche einzeln für die continuirliche und für die concentrirte Belastung auf bekannte Weise gefunden werden, zu liegen kommt oder mit einem der letzteren selbst zusammenfällt. Im Falle der Fig. 35 fällt der gefährliche Querschnitt mit dem Maximalmomenten-Querschnitt der concentrirten Kräfte zusammen, der bei 2' liegt.

§ 151. Andere Methode, um die im vorigen Paragraphen behandelten Aufgaben zu lösen in dem Falle, wo die continuirliche Belastung gleichmässig vertheilt ist. — In dem Falle, wo die continuirliche Belastung gleichmässig vertheilt ist, kann man die im vorigen § gepflogenen Untersuchungen auch durchführen, ohne eine Curve zeichnen zu müssen. Da dies hiebei einzuschlagende Verfahren namentlich bei Aufsuchung des gefährlichen Querschnitts sehr rasch zum Ziele führt, so möge es hier kurz noch beschrieben werden.

Wenn man auf der Länge des Balkens als Abscissenaxe Ordinaten errichtet, gleich der Summe der ausserhalb des betreffenden Querschnitts wirkenden Kräfte, so ist die Verbindungslinie der End-

sätzen zu beurtheilen, die wir schon im § 150 befolgt haben: man zeichnet nämlich für die neue Kraft ein eigenes Kräfte- und Seilpolygon und fügt die sich ergebenden Kräfte und Momente für irgend einen Querschnitt den schon vorhandenen einfach bei.

In Fig. 37 Taf. XIV haben wir angenommen, dass zu den auf den Balken wirkenden stetig vertheilten und concentrirten Kräften eine neue Kraft hinzukomme, indem sie etwa von links über das Ende A des Balkens hereintritt. Das Kräftepolygon für dieselbe sei 0′1′C′ (Fig. 37[c]) und die Entfernung des Poles C′ in demselben von der Kräftelinie, die Momentenbasis, so gross wie in Fig. 37[a]. Für irgend eine Stellung P'_1 dieser Kraft ist alsdann A′I′B″ das Seilpolygon, und die zu seiner Schlusslinie A′B″ gezogene Parallele C′T′ in Fig. 37[c] theilt die Kraft 0′1′ in die beiden Stücke 0′T′ und T′1′, welche den schon vorhandenen Auflagerdrücken hinzugefügt werden müssen. Die Auflager-Reaktionen vergrössern sich also in Folge des Hinzutretens der neuen Kraft in der Stellung P'_1 um T′0′ in A und 1′T′ in B.

Nehmen wir nun zunächst einen Querschnitt y, für welchen die Kraft P'_1 auf derjenigen seiner beiden Seiten liegt, wo sich der den ursprünglichen Kräften entsprechende gefährliche Querschnitt 2 nicht befindet, so erleidet die Summe der ausserhalb dieses Querschnittes wirkenden Kräfte zu beiden Seiten desselben folgende Aenderungen. Auf derjenigen Seite des Querschnitts, wo die Kraft P'_1 liegt und folglich der gefährliche Querschnitt nicht, wo also jene Summe ursprünglich eine aufwärts gerichtete Mittelkraft ist, kommt die nach abwärts gerichtete Kraft T′1′ (gleich T′0′ + 0′1′, algrebraisch genommen) hinzu, die fragliche Kräftesumme wird also verkleinert. Auf der anderen Seite des Querschnitts y, wo der gefährliche Querschnitt liegt, wo also jene Kräftesumme ursprünglich abwärts gerichtet ist, kommt die aufwärts gerichtete Kraft 1′T′ hinzu, absolut genommen tritt also wieder eine Verkleinerung der fraglichen Kräftesumme ein, und zwar in demselben Betrag wie auf der andern Seite. Das Gesammtdrehungsmoment der ausser ihm liegenden Kräfte wird aber zu beiden Seiten des Querschnitts, absolut genommen, vergrössert, und zwar um den Abschnitt $m'\eta'$. Beide Veränderungen, die der Kräftesumme zu beiden Seiten des Querschnittes und diejenige der Drehungsmomente, werden um so grösser, je näher die Kraft P'_1 dem Querschnitt y rückt, ohne ihn zu überschreiten, also am grössten, wenn P'_1 über dem Querschnitt y selbst steht.

Ueberschreitet die neu hinzugetretene Kraft den Querschnitt y, so befindet sich derselbe unter den nämlichen Umständen, wie z. B. der Querschnitt z in Bezug auf die vorige Stellung P'_1 der neuen Kraft: diese liegt mit dem gefährlichen Querschnitt 2 auf der nämlichen Seite des Querschnittes z. Auf dieser Seite wird der ursprünglich schon abwärts gerichteten Kräftesumme die abwärts wirkende Kraft T′1′ (nämlich T′0′ + 0′1′) hinzugefügt, sie wird also absolut vergrössert; zu der auf der anderen Seite des Querschnitts liegenden, aufwärts gerichteten Kräftesumme kommt aber die aufwärts gerichtete Kraft 1′T′ hinzu, sie wird also gleichfalls absolut vergrössert; eben so nimmt das Drehungsmoment der ausserhalb des Querschnitts z liegenden Kräfte auf beiden Seiten, absolut genommen, zu, und zwar um den Abschnitt $n'\xi'$. Diese Aenderungen werden wieder um so grösser, je näher P'_1 an den Querschnitt rückt, am grössten dann, wenn sie über ihm steht.

Wenn folglich eine Last über das eine Ende eines Trägers hereintritt, so vermindert sich absolut genommen die Summe der Transversalkräfte in allen zwischen ihr und dem ursprünglichen gefährlichen Querschnitt liegenden Querschnitten, vergrössert sich dagegen in den jenseits des gefährlichen Querschnittes befindlichen, während die Drehungsmomente für sämmtliche Querschnitte sich vergrössern. Diese Aenderungen nehmen für jene Querschnitte sowohl, als auch für diese zu, wenn ihnen die Last näher rückt, für diejenigen Querschnitte also, welche sich diesseits des gefährlichen befinden, wird die Summe der Transversalkräfte absolut genommen am kleinsten, das Drehungsmoment aber am grössten, wenn die Kraft über ihnen steht. Sobald aber die Last einen solchen Querschnitt überschreitet, springt die Summe der Transversalkräfte auf einmal von einem kleinsten in einen grössten Werth über und nimmt bei weiterem Fortschreiten der Last ab, wie die

Drehungsmomente auch. Für die jenseits des gefährlichen Querschnitts liegenden Querschnitte nimmt die Kräftesumme absolut zu, sowie auch das Drehungsmoment, je näher ihnen die Last rückt, und beide erhalten einen grössten Werth, wenn die Last über dem betr. Querschnitt steht. Mit dem Ueberschreiten desselben springt jener grösste Werth für die Transversalkräfte auf einmal in einen kleinsten über und nimmt dann bei weiterem Fortschreiten der Last wieder zu, das Drehungsmoment dagegen ab.

Da beim Hereintreten einer Last auf einen Träger die Summe der Transversalkräfte für die diesseits der gefährlichen liegenden Querschnitte kleiner, für die jenseits gelegenen grösser wird, der gefährliche Querschnitt der gesammten Belastung aber immer da liegt, wo jene Kräftesumme Null ist, so folgt, dass der gefährliche Querschnitt im Allgemeinen einer vom einen Ende hereintretenden Last entgegenrückt. Beide werden sich also an einer bestimmten Stelle treffen. Ueber diese hinaus wird der gefährliche Querschnitt die fortschreitende Last, indem er sich wieder rückwärts bewegt, begleiten, wird mit ihr seine ursprüngliche Stellung überschreiten und ihr bis dahin folgen, wo er mit ihr, wenn sie von der anderen Seite kommen würde, zusammentreffen müsste. Von da an kehrt bei weiterem Fortschreiten der Last der gefährliche Querschnitt wieder zurück, um an seiner ursprünglichen Stelle wieder anzukommen, wenn die Last auf der anderen Seite den Träger verlässt.

Es ist gewiss interessant, die beiden Stellen kennen zu lernen, wo der entgegenrückende gefährliche Querschnitt mit der Last zusammentrifft, und wo er sie wieder verlässt, und dies kann mit Hülfe des Kräftezuges $A_1^{*} 1' 1'' 2' 2'' \dots 4'' B_1'$ in Fig. 37ᵇ Taf. XIV sehr leicht geschehen, vorausgesetzt, dass wie dort die stetig vertheilten Kräfte auch g l e i c h m ä s s i g vertheilt sind. Wenn die Kraft P_1', über A hereinkommend, eben nach $1'$ gelangt ist, so erhält man die beiden Theile, in welche sie sich auf die beiden Auflager vertheilt, auch dadurch, dass man am entgegengesetzten Ende B des Trägers senkrecht auf ihn die Strecke TE gleich P_1' aufträgt und durch den Durchschnittspunkt der Verbindungslinie $A_0 E$ mit der durch $1'$ gehenden Verticalen eine Horizontale $A_0' B_0'$ zieht. TB_0' ist dann der von P_1' herrührende Auflagerdruck oder auch die Auflager-Reaction in B. Die gesammte Auflager-Reaction an diesem Balkenende ist nun folglich $B_0' B_1'$, und der ganze jenseitige Kräftezug von B_1' bis $1'''$ kann unverändert bleiben, wenn man nur einfach die Abscissenaxe von $A_0 T$ nach $A_0' B_0'$ hinaufrückt. Der gefährliche Querschnitt, welcher wieder durch den Schnittpunkt des Kräftezuges mit der Abscissenaxe erhalten wird, ändert hier in Folge des überwiegenden Einflusses der Kraft P_2 seine Lage nicht; er kommt der Kraft P_1' nicht entgegen, sondern erwartet sie, bis sie bei 2 über ihm steht, und die neue Abscisenaxe, bestimmt durch den Schnittpunkt des Kräftezuges mit $A_0 E$, die Lage $A_0'' B_0''$ hat.

Wenn dagegen die Kraft P_1', von B hereintretend, etwa nach z gekommen ist, so wird die Art und Weise, wie sie sich auf die Auflager vertheilt, bestimmt, indem man wieder auf der entgegengesetzten Seite $A_0 E'$ gleich P_1' aufträgt und durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie $E'T$ mit der durch z gezogenen Verticalen eine Horizontallinie $A_0''' B_0'''$ zieht. TB_0''' ist dann gleich der Vergrösserung der Auflager-Reaction durch die Kraft P_1' an der Stütze A und der ganze jenseitige Kräftezug $A_1' 1' 1'' \dots$ bis z' kann unverändert bleiben, wenn die Abscissenaxe von $A_0 T$ nach $A_0''' B_0'''$ heruntergerückt wird. Dieselbe durchschneidet den Kräftezug in x', entsprechend dem Querschnitt x_0 oder x, und dies zeigt, dass der gefährliche Querschnitt der über B hereinkommenden Kraft P_1' von 2 bis x entgegenkommt, wenn diese bis z hereinrückt. Bei weiterem Fortschreiten der Kraft P_1' rückt ihr der gefährliche Querschnitt noch mehr entgegen, und beide treffen sich offenbar an der Stelle v_0 oder v, welche in der Verticalen liegt, die durch den Schnittpunkt v' der Verbindungslinie $E'T$ mit dem Kräftezug hindurchgeht.

Um also die oben besprochenen zwei interessanten Punkte zu finden, hat man nichts weiter zu thun, als in der Fig. 37ᵇ, die auf bekannte Weise (§ 151) aus den ursprünglichen Belastungen

gezeichnet wurde, an beiden Enden der Abscissenaxe A_0T und senkrecht auf diese die neu hinzukommende Last abzutragen, und zwar im entgegengesetzten Sinne der dort befindlichen Ordinaten. Verbindet man dann die Endpunkte dieser abgetragenen Stücke mit den jenseitigen Abscissenaxen-Enden, und sucht die Schnittpunkte mit dem Kräftezug auf, so liegen die gesuchten Stellen in den Verticalen durch diese Schnittpunkte.

§ 153. Locomotiven-Züge als Belastung von Brückenträgern. — Concentrirte Kräfte kommen in den Anwendungen in der Regel in einer bestimmten Reihenfolge vor. So z. B. diejenigen, welche bei einem Eisenbahnzug oder bei einem Frachtwagen in den Berührungspunkten der Räder mit den Schienen oder mit der Strasse wirken und in dieser Weise auf die Träger einer Eisenbahn- oder Strassenbrücke ausgeübt werden. In einem solchen Falle entsteht dann die Aufgabe, die Wirkung näher zu untersuchen, welche der Eisenbahnzug, um beim ersten Beispiele stehen zu bleiben, auf den Träger ausübt in den verschiedenen Stellungen, welche er während des Ueberführens über denselben möglicherweise einnehmen kann.

Man führt diese Untersuchungen am besten so durch, dass man aus den gegebenen und in gegebener Reihenfolge geordneten verticalen Kräften das Kräfte- und Seilpolygon construirt, und in letzterem längs einer beliebig angenommenen horizontalen Linie den Träger, d. h. eine Strecke gleich dessen Spannweite, verschiebt, um ihm so nach und nach die Lagen gegen jene Kräfte zu geben, welche umgekehrt diese gegen ihn während der Bewegung des Zuges annehmen.

Die bedeutendste möglicherweise vorkommende Belastung von Eisenbahnbrücken bilden Züge von Locomotiven, von denen man natürlich die schwerste Art den Berechnungen der Dimensionen eines Brückenträgers zu Grunde legen muss. Als Norm für solche schwere Maschinen wird gewöhnlich die sogenannte Engerth'sche Locomotive genommen. Die Dimensionen derselben, so weit sie hier in Betracht kommen, und die Vertheilung des Gesammtgewichtes auf die einzelnen Axen geben wir in folgenden abgerundeten Zahlen. Die Abstände der drei Locomotivaxen unter einander betragen je $1{,}10^{m}$, derjenige der beiden Tenderaxen ist $2{,}50^{m}$. Die vordere Tenderaxe ist von der hintersten Locomotivaxe um $1{,}20^{m}$ entfernt, das Ende des vorderen Puffers an der Locomotive von deren Vorderaxe um $2{,}50^{m}$, das Ende des hinteren Puffers am Tender von der hinteren Tenderaxe um $2{,}20^{m}$. Die Gesammtlänge der Locomotive mit Tender ist also $10{,}6^{m}$. Jede Locomotivaxe ist mit 13^{t} (à 1000^{kg}), jede Tenderaxe mit $8{,}5^{t}$ belastet.

In Fig. 38 Taf. XV wurde angenommen, dass zwei solche Locomotiven, mit ihren Kaminen gegen einander gekehrt, zusammengestellt worden seien und alsdann das Kräfte- und Seilpolygon construirt; in Fig. 40 Taf. XVI geschah dasselbe für einen Zug der gleichen Locomotiven, die unmittelbar auf einander folgend ihre Vorderseiten nach links hin kehren. Die in den Berührungspunkten der Räder wirkenden Belastungen sind in beiden Figuren, in der Reihenfolge von links nach rechts, mit P_1, P_2... bis P_{10} bezw. P_{20} bezeichnet. Der Längenmassstab ist in Fig. 38 Taf. XV $1^{cm} = 1^{m}$, der Kräftemassstab $1^{cm} = 10^{t}$. Die Kräfte liegen bei der in dieser Figur getroffenen Anordnung symmetrisch um einen Mittelpunkt, den Zusammenstossungspunkt der beiden Vorderpuffer an den Locomotiven. Der Pol im Kräftepolygon wurde desshalb der Mitte der Kräftelinie gegenüber angenommen, und das Seilpolygon konnte so gezeichnet werden, dass seine äussersten Seiten durch die beiden Hinterpuffer der Tender gehen, und dass es symmetrisch um eine Mittellinie liegt. Die Entfernung des Pols von der Kräftelinie ist 5^{cm} und daher der Massstab für die Momente $1^{cm} = 50^{mt}$ (Metertonnen). In Fig. 40 Taf. XVI ist der Längenmassstab $\frac{1}{2}^{cm} = 1^{m}$ und der Kräftemasstab $\frac{1}{2}^{cm} = 10^{t}$. Die Entfernung des Pols im Kräftepolygon von der Kräftelinie beträgt $5^{cm} = 10^{m}$ oder 100^{t}. Der Momentenmassstab ist folglich $\frac{1}{2}^{cm} = 100^{mt}$.

Bei den oben angedeuteten Untersuchungen werden wir in den Figuren 38^{b} Taf. XV und 40^{b} Taf. XVI die Spannweite längs der Horizontallinie XX verschieben. Wenn dann für irgend

eine Stellung dieser Spannweite, z. B. ss in Fig. 40^b, wo also die 13 Räder P_4 bis P_{16} auf ihr stehen, Verticale durch ihre Endpunkte gezogen werden, so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte $\sigma\sigma$ dieser Verticalen mit dem Seilpolygon die Schlusslinie des zugehörigen Theils des letzteren. Eine Parallele zu derselben durch den Pol des Kräftepolygons theilt folglich die Summe der Lasten, welche auf jenen Rädern ruhen, in die beiden Theile, in welchen sie sich als Auflagerdrücke auf die beiden Stützpunkte überträgt; daraus folgt dann sehr leicht die Summe der ausserhalb eines gegebenen Querschnitts wirkenden Kräfte; und deren Drehungsmoment endlich um irgend einen Punkt oder vielmehr um eine horizontale Queraxe des Querschnitts ist gleich dem Abschnitt, welcher auf der durch den Querschnitt gezogenen Verticalen zwischen jener Schlusslinie und dem Seilpolygon liegt. Wir werden in der Folge der Kürze halber jene Kräftesumme für einen gegebenen Querschnitt „Summe der Verticalkräfte" und dieses Drehungsmoment einfach das „Drehungsmoment für den betreffenden Querschnitt" nennen.

§ **154. Parabel, welche von der Schlusslinie des Seilpolygons umhüllt wird, während sich ein Zug von einer bestimmten Anzahl Axen über einen Träger von gegebener Spannweite bewegt.** — Während bei der Verschiebung der Spannweite längs der Horizontallinie XX (Fig. 38^b Taf. XV und Fig. 40^b Taf. XVI) die Endpunkte der Schlusslinie auf den nämlichen beiden Seilpolygonseiten bleiben, so dass also weder eines von den eben auf dem Träger befindlichen Rädern über denselben hinausrollt, noch ein neues auf ihn aufläuft, umhüllt jene Schlusslinie nach einem bekannten geometrischen Satz eine Parabel. Diese Parabel hat einige, für die nachfolgenden Untersuchungen wichtige Eigenschaften, die wir mit Hülfe der Fig. 39 Taf. XV erläutern wollen. In derselben sei XX wieder die horizontale Linie, längs welcher die Spannweite verschoben wird, αM und αN seien die beiden äussersten Seilpolygonseiten, auf denen dabei die Endpunkte der Schlusslinie fortrücken. Für irgend eine Lage ss der Spannweite ist folglich $\sigma\sigma$ die zugehörige Schlusslinie. Um deren Berührungspunkt β mit der umhüllten Parabel zu finden, gehen wir von der Stellung $s_0 s_0$ der Spannweite aus, in welcher ihre Mitte c_0 in die Verticallinie fällt, welche durch den Schnittpunkt α der äussersten Polygonseiten geht. In dieser Stellung berührt die zugehörige Schlusslinie $\sigma_0\sigma_0$ die umhüllte Parabel in ihrem Halbirungspunkt ω_0 und hat die Eigenschaft, dass sich auf ihr die Halbirungspunkte aller übrigen Tangenten befinden, vorausgesetzt, dass diese nur bis an die äussersten Polygonseiten αM und αN gezogen werden. Eine Verticale durch den Mittelpunkt c der Spannweite in ihrer Stellung ss geht folglich durch den Schnittpunkt γ der beiden Schlusslinien $\sigma\sigma$ und $\sigma_0\sigma_0$ hindurch. Von diesem Schnittpunkte aus gehen zwei Tangenten an die Parabel, deren Berührungspunkte so liegen, dass die durch sie hindurchgezogenen Verticalen beiderseits gleich weit von der Verticallinie cγ entfernt sind. Macht man folglich cb gleich cc_0, so liegt in der durch b gezogenen Verticallinie der Berührungspunkt β der Tangente $\sigma\sigma$.

Umgekehrt, will man diejenige Stellung ss der Spannweite finden, in welcher die Verticallinie durch einen gegebenen Punkt b (Querschnitt) derselben die zugehörige Schlusslinie in ihrem Berührungspunkt mit der Parabel trifft, so muss die Mitte c der Spannweite mitten zwischen der Verticalen αc_0 durch den Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten und jenem Querschnitt gelegen sein; man hat folglich c_0s (links) gleich bs (rechts) zu machen.

Wenn man die Spannweite aus dieser Stellung ss fortrückt und zugleich mit ihr den Querschnitt b, durch den man immer Verticallinien zieht, so liegen die Schnittpunkte aller dieser Verticallinien mit den zugehörigen Schlusslinien auf der Tangente $\sigma\sigma$. Wenn also b_1' als solcher Schnittpunkt betrachtet wird, $b_1 b_1'$ also die zugehörige Verticale ist, so muss der Querschnitt b von b nach b_1 gerückt sein und um eben so viel die ganze Spannweite von ss nach $s_1 s_1$, wo $ss_1 = bb_1$ ist. Aber b_1' ist natürlich jetzt nicht mehr Berührungspunkt der Schlusslinie $\sigma_1\sigma_1$ mit der Parabel. Derselbe, δ_1, muss erst auf die oben schon erörterte Weise gefunden werden. Der Kürze halber werden wir diejenige Schlusslinie, welche von der Verticalen durch einen Querschnitt in ihrem

Berührungspunkt mit der Parabel getroffen wird, die diesem Querschnitt zugeordnete Schlusslinie nennen, und umgekehrt jenen Querschnitt den der Schlusslinie zugeordneten.

§ 155. Drehungsmomente, welche ein Zug von bestimmter Anzahl Axen in den verschiedenen Querschnitten eines Trägers von gegebener Spannweite hervorbringt, während er sich über den Träger bewegt. — Indem man sich vorstellt, dass eine bestimmte Reihe gegebener concentrirter Kräfte, belastete Räder also, um bei obigen Beispielen stehen zu bleiben, auf einem gegebenen Träger verschoben werden, sind es besonders folgende Fragen, deren Beantwortung für die Berechnung der Dimensionen des Trägers von Wichtigkeit ist.

1. Wenn eine bestimmte Anzahl von Rädern auf einem Träger von bestimmter Spannweite verschoben werden, so dass keines über einen der Stützpunkte hinausrückt, aber auch kein neues auf den Träger aufrollt: bei welcher Stellung findet für einen gegebenen Querschnitt das grösste Drehungsmoment der ausser ihm wirkenden Kräfte statt, und wie gross ist es?

2. Bei welcher Stellung des Zuges findet, unter denselben Voraussetzungen wie oben, unter einer bestimmten Stelle desselben, d. h. für den Querschnitt, über welchem sie steht, das grösste Drehungsmoment statt?

3. Wie gross ist überhaupt, immer unter denselben Voraussetzungen wie bei 1. und alle die verschiedenen Querschnitte mit einander verglichen, das grösste vorkommende Maximalmoment; in welchem Querschnitt und bei welcher Stellung des Zuges findet es statt?

4. Wenn von vorn herein die Anzahl der Räder, welche auf den Träger zu stehen kommen sollen, nicht bestimmt ist, wie viel sind auf denselben zu bringen, und welche Stellung ist denselben zu geben, damit das Drehungsmoment im jeweiligen gefährlichen Querschnitt am grössten wird? Wo liegt dann dieser Querschnitt, welche Stellung nimmt der Zug ein, und wie gross ist jenes grösste Maximalmoment?

Die drei ersten Fragen sind leicht mit Hülfe der im vorigen § erörterten Eigenschaften der Parabel zu beantworten, welche von den Schlusslinien des Seilpolygons für die gegebenen Kräfte umhüllt wird, während diese Kräfte über die Spannweite verschoben werden oder die Spannweite unter ihnen.

Denken wir uns behufs Beantwortung der ersten Frage die gegebene Spannweite, indem sie längs einer Horizontallinie XX (Fig. 39 Taf. XV) im Seilpolygon verschoben wird, in solcher Lage so gezeichnet, dass die vom gegebenen Querschnitt b herabgefällte Verticale die zugehörige Schlusslinie in ihrem Berührungspunkte β mit der Parabel schneidet, dann liegen auf dieser, dem Querschnitt b zugeordneten Schlusslinie alle die Schnittpunkte, in welchen bei den anderen Stellungen der Spannweite die vom gegebenen Querschnitt herabgefällten Verticalen die zugehörigen Schlusslinien treffen. In diesen Verticalen, zwischen den betreffenden Schlusslinien und dem Seilpolygon, liegen aber die reducirten Drehungsmomente für den Querschnitt in seinen verschiedenen Lagen. Das grösste dieser Momente ist also dasjenige, welches gleich dem grössten Abstand ist, der, vertical gemessen, zwischen jener erstgezeichneten Schlusslinie und dem Seilpolygon stattfindet; er ist immer bei einer Ecke des letzteren zu suchen. Mit ihm hat man zugleich die Stellung des Querschnitts und die Lage der Spannweite selbst in Bezug auf die gegebenen Lasten gefunden. Diese ist immer so, dass eines der Räder über den gegebenen Querschnitt zu stehen kommt.

In Fig. 38^b Taf. XV haben wir beispielsweise vorausgesetzt, dass die 4 Räder P_6 bis P_9 auf eine Spannweite von 6^m so gebracht werden sollen, dass in dem Querschnitt, welcher 2^m vom linken Ende entfernt ist, das grösstmöglichste Drehungsmoment stattfindet. Wir legten desshalb die Spannweite $t_1 t_1$ so, dass ihre Mitte m_1, wie sie 1^m vom gegebenen Querschnitt entfernt ist, auch 1^m vom Durchschnittspunkt α der äussersten Seilpolygonseiten absteht, welcher Durchschnittspunkt hier auf der Linie XX selbst liegt. Das Stück αt_1 (rechts) wurde also gleich $q_1 t_1$ (links) gemacht, mit q_1 den gegebenen Querschnitt bezeichnet. Wir zogen dann die Schlusslinie $t_1 \tau_1$ und suchten diejenige

Polygonecke, deren vertical gemessener Abstand von jener am grössten ist. Es ist dies die Ecke VII. Daraus folgt sofort die Lage q, welche der gegebene Querschnitt hiebei hat, und diejenige t t der Spannweite selbst, indem man $t_1 t = q_1 q$ macht. Das Maximalmoment beträgt in vorliegendem Fall $0{,}84^{cm}$ oder mit Berücksichtigung des im § 153 für die Fig. 38 bereits angegebenen Massstabes gleich 42^{mt}.

Es leuchtet sofort ein, dass unter der Ecke VII das grösste Drehungsmoment stattfindet für alle die Querschnitte, für welche die zugeordnete Schlusslinie von der Lage an, wo sie parallel zu VI VII ist, bis zu der, wo sie parallel zu VII VIII wird, alle möglichen Lagen einnimmt. Zeichnet man die genannten Grenzlagen der Schlusslinien für eine gegebene Spannweite und die ihnen zugeordneten Querschnitte, so ergibt sich mit Rücksichtnahme auf das Kräftepolygon leicht, dass sich die Entfernung dieser beiden Querschnitte zur Spannweite verhält, wie die Last P_7 zur Summe aller, auf der Spannweite stehenden concentrirten Kräfte P_6 bis P_9. Hieraus folgt also der Satz: *Theilt man die ganze Spannweite in so viele Theile, als concentrirte Lasten auf ihr stehen und macht man diese Theile proportional diesen Lasten, so findet in irgend einem Querschnitt das grösste Drehungsmoment statt, wenn diejenige Last über ihm steht, welche dem Proportionaltheil entspricht, in welcher der Querschnitt liegt*[1]).

Die in der *zweiten* Frage geforderte Stellung des Zuges auf dem Träger, oder umgekehrt, die entsprechende Lage der Spannweite ist die, wo die Verticale, welche durch die bestimmte Stelle S (Fig. 38[b] Taf. XV) des Zuges hindurchgeht, die Schlusslinie, welche jener Lage zugehört, in ihrem Berührungspunkt mit der Parabel schneidet: denn dann ist das stets auf jener Verticalen zu messende Drehungsmoment am grössten; alle anderen Schlusslinien schneiden die Verticale in Punkten, die zwischen jenem Berührungspunkt und dem Seilpolygon liegen. Nach den aus vorigem § bekannten Eigenschaften der Parabel muss also die Mitte m_2 des Trägers mitten zwischen dem Schnittpunkt α der äussersten Seilpolygonseiten und dem Schnittpunkt s jener Verticalen mit der Axe X X liegen, wobei wir voraussetzen, dass es sich wieder um die vier Räder P_6 bis P_9 handle. Geben wir folglich dem Träger, wie vorhin, eine Spannweite von 6^m, so ist daraus seine Lage $t_2 t_2$, sowie die entsprechende Schlusslinie $t_2 \tau_2$ und das gesuchte Maximalmoment leicht zu finden. Es ist im vorliegenden Fall gleich $0{,}92^{cm} = 46^{mt}$ und findet dann statt, wenn die gegebene Stelle des Zuges über dem Querschnitt s der Spannweite $t_2 t_2$ steht.

Die *dritte* Frage endlich ist sehr leicht zu beantworten, wenn die Parabel, welche die Schlusslinien während der Verschiebung der Spannweite umhüllen, gezeichnet ist. Der grösste Abstand, welcher, vertical gemessen, zwischen dieser Parabel und dem Seilpolygon stattfindet, und der stets unter einer Ecke des letzteren zu suchen ist, gibt das grösste Maximalmoment, welches überhaupt in der gegebenen Spannweite vorkommen kann. Dieses findet also stets in einem Querschnitt statt, über welchem ein Rad steht. Ist jene Polygonecke für die nämlichen vier Räder P_6 bis P_9, die wir schon bisher betrachtet haben, und für die nämliche Spannweite von 6^m die mit VII bezeichnete, so ist die Lage der Spannweite und jenes gefährlichen Querschnitts in ihr leicht nach § 154 zu finden. Der letztere liegt da, wo die durch VII gezogene Verticale die X X schneidet, in q. Und weil die zur gesuchten Lage der Spannweite gehörige Schlusslinie die Verticale durch q da schneiden muss, wo sie selbst die Parabel berührt, so muss die Mitte m_3 der Spannweite mitten zwischen q und α, dem Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten, liegen. Die Endpunkte t_3, t_3 der Spannweite sind dadurch ebenfalls bekannt.

---

[1]) Dieser Satz wurde zuerst von *Asimont* rechnerisch (Zeitschrift d. bayer. Archit.- u. Ingenieurvereins, Jahrg. 1875) und dann von *Wittmann* („Die graphische Bestimmung der Maximalmomente“, München 1877, Th. Ackermann) geometrisch nachgewiesen.

Wenn freilich die Parabel nicht gezeichnet ist und auch nicht gezeichnet werden will, dann kann man jenes grösste Maximalmoment nur durch Probiren auffinden, indem man eben einige der Polygonecken als die richtigen nimmt und die auf obige Weise für sie gefundenen Maximalmomente mit einander vergleicht. Einige Anhaltspunkte hiebei gewähren folgende Betrachtungen. Wenn die Last über einem Träger gleichmässig ausgebreitet ist, so fällt der Maximalmomenten-Querschnitt in die Mitte und zugleich in die Verticale, welche durch den Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten gezogen wird. Das Seilpolygon selbst wird eine Parabel. Je ungleichförmiger die Last vertheilt ist, desto mehr rückt der Maximalmomenten-Querschnitt nach der schwerer belasteten Seite hin, der Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten zwar auch, aber nicht in demselben Masse. Immerhin aber wird man, bei nicht sehr ungleichmässig vertheilter Belastung, den Maximalmomenten-Querschnitt in der Nähe der Verticalen durch jenen Durchschnittspunkt suchen dürfen, d. h. also in der Nähe der Mittelkraft der auf dem Träger lastenden Kräfte. So waren wir in unserem obigem Beispiel berechtigt, die Ecke VII, welche der Verticalen durch den Schnittpunkt α am nächsten liegt, als diejenige anzunehmen, unter welcher der Maximalmomenten-Querschnitt zunächst zu suchen ist. Auf jeden Fall kann durch obige, für die Ecke VII gezeigte Construction, indem man sie für einige in der Nähe von α gelegene Polygonecken ausführt, der Querschnitt gefunden werden, in dem das grösste Maximalmoment stattfindet.

Bei der Lastvertheilung, wie wir sie in Fig. 38 Taf. XV vorausgesetzt haben, gibt immer diejenige Polygonecke, welche dem Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten zunächst liegt, den in Rede stehenden Querschnitt, für die Räder P_6 bis P_9 also die Ecke VII. Das grösste Maximalmoment also, welches diese vier Räder auf einem Träger von 6^m Spannweite hervorbringen können, ist gleich $\text{VII}\,r = 0{,}95^{cm} = 47{,}5^{mt}$. Es findet statt, wenn der Träger die Lage $t_3\,t_4$ gegen jene Räder hat, und zwar in dem Querschnitt q, über welchem eben das Rad P_7 steht.

§ 156. Ungünstigste Stellung eines Locomotivenzuges auf einem Balken von gegebener Spannweite. — Die Beantwortung der vierten Frage des vorigen § erfordert eine etwas umständlichere Betrachtung. Die ungünstigste Stellung hat eine gegebene Reihe concentrirter Kräfte, also ein Locomotivenzug auf einem Träger von bestimmter Spannweite dann, wenn er ein möglichst grosses Moment im gefährlichen Querschnitt hervorbringt. Diese Stellung findet man nach dem vorhergehenden § dadurch, dass in der Regel die Mitte des Trägers mitten zwischen der Verticalen durch den Schnittpunkt der äussersten Polygonseiten der wirksamen Belastungen, also mitten zwischen der Mitteldruckslinie der letzteren und zwischen der durch die nächstgelegene Ecke des Seilpolygons gezogenen Verticalen liegt. Behält man jene Mitte bei, vergrössert aber die Spannweite, so wird das Maximalmoment, welches unter dem jener Polygonecke entsprechenden Rade stattfindet, immer grösser und am grössten dann, wenn die Spannweite die grösste Länge erhält, die möglich ist, ohne dass mehr Räder, als von vornherein angenommen wurde, auf sie geschoben werden.

So ist für die zwei Räder P_4 und P_5 in Fig. 38^b Taf. XV, welche wir uns auf einem Träger stehend denken, α_1 der Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten, durch welche die Mitteldruckslinie geht, und IV die der letzteren zunächst gelegene Polygonecke. Die fast eben so nahe liegende Ecke V gibt wenigstens kein grösseres Maximalmoment als jene. Bei derjenigen Stellung also, wo jene beiden Räder das grösste Maximalmoment hervorbringen, muss die Mitte c_1 des Trägers mitten zwischen α_1 und der durch IV gezogenen Verticalen liegen; und je grösser die Spannweite wird, desto grösser wird jenes Maximalmoment, am grössten also dann, wenn $s_1\,s_1$ diese Spannweite ist, wo die durch den linken Endpunkt gezogene Verticale eben durch die Ecke III geht.

Nimmt man nun das Rad P_3 noch mit auf, so rückt der Durchschnittspunkt der äussersten Seilpolygonseiten nach α_2 und fällt hier fast in die durch die Ecke IV gezogene Verticale. Hier

Bei Aufnahme des siebenten Rades P_7 rückt der Schnittpunkt der äussersten Seilpolygonseiten nach α_6, und der durch denselben gezogenen Verticalen $\alpha_6 a_6$ liegt die Ecke V am nächsten. Die Trägermitte ist folglich nach c_6, mitten zwischen V und a_6, zu verlegen, während sie unmittelbar vorher noch in c_5 lag. Ist M_2 die Mitte zwischen c_5 und c_6, so ergibt sich ganz auf dieselbe Weise wie vorhin, dass die Spannweite $S_2 S_2$, deren Mitte M_2 ist, und deren rechtes Ende in der Verticalen durch die Ecke VII liegt, die obere Grenze ist für diejenigen, in welchen schon die sechs Räder P_1 bis P_6 das grösstmöglichste Maximalmoment hervorbringen können. Aehnliches gilt für die Spannweite $S_3 S_3$ mit der Mitte M_3 in Bezug auf die sieben Räder P_1 bis P_7 u. s. w. fort.

Wir wiederholen: Es können

bis zur Spannweite	$s_1 s_1 =$	$2{,}80^m$	schon die	2	Räder	P_4 und P_5,
„ „ „	$s'_2 s'_2 =$	$4{,}62^m$	„ „	3	„	P_3 bis P_5,
„ „ „	$s'_3 s'_3 =$	$9{,}25^m$	„ „	4	„	P_2 „ P_5,
„ „ „	$S_1 S_1 =$	$13{,}08^m$	„ „	5	„	P_1 „ P_5,
„ „ „	$S_2 S_2 =$	$12{,}92^m$	„ „	6	„	P_1 „ P_6,
„ „ „	$S_3 S_3 =$	$13{,}63^m$	„ „	7	„	P_1 „ P_7,
	etc.		etc.			

das grösstmöglichste Maximalmoment hervorbringen. Die Aufnahme des Rades P_6 auf den Träger veranlasst also eher eine Verringerung als eine Vergrösserung des Maximalmomentes, was leicht auch direct aus der Figur ersichtlich ist.

Hat man nun unter Voraussetzung der bei obigen Betrachtungen zu Grunde gelegten Verhältnisse die vierte Frage des vorigen § in Bezug auf eine Spannweite von 8^m zu beantworten, so ergibt sich aus obiger Uebersicht, dass die vier Räder P_2 bis P_5 auf sie zu stellen sind, ihre Mitte also nach c_3 zu verlegen ist. Daraus folgt sofort die Lage dieser Spannweite $s''_3 s''_3$ gegen jene vier Räder, die zugehörige Schlusslinie $\sigma''_3 s''_3$ und das grösstmöglichste Maximalmoment $IV r''_3 = 1{,}40^{cm} = 70^{mt}$, stattfindend in dem Querschnitt α_2. Eine Parallele CT zur Schlusslinie $\sigma''_3 s''_3$, durch den Pol des Kräftepolygons gezogen, theilt die Summe $1\,5 = 47{,}5^t$ der Kräfte P_2 bis P_5 in die beiden Theile, $1\,T = 25{,}5$ und $T\,5 = 22{,}0^t$, welche die Auflagerdrücke repräsentiren. Dieselben Stücke, in entgegengesetzter Richtung genommen, sind gleich den Auflager-Reactionen, und aus diesen erhält man auf bekannte Weise die Transversalkräfte für die einzelnen Querschnitte.

§ 157. Grösster Werth des Drehungsmomentes, welches ein Locomotivenzug in einem bestimmten Querschnitt eines Balkens von gegebener Spannweite, über den er sich bewegt, hervorbringen kann. — Bei Trägern mit grosser Spannweite, welche in der Regel nicht durchweg gleiche Querschnitte erhalten, reicht es nicht aus, das grösste Maximalmoment, welches eine gegebene Reihe concentrirter Kräfte an ihnen hervorbringen kann, zu ermitteln, sondern es müssen für eine Anzahl von einzelnen Querschnitten die grössten Werthe gefunden werden, welche die Drehungsmomente der ausser ihnen wirkenden Kräfte annehmen können.

Zu diesem Behufe muss man die Spannweite des Trägers wieder längs einer horizontalen Linie im Seilpolygon der gegebenen Kräfte allmählich verschieben, für jede ihrer Lagen die Schlusslinie zeichnen und die Punkte anmerken, wo sie von dem, durch die mitverschobenen Querschnitte gezogenen Verticalen getroffen wird. Diejenigen dieser Punkte, welche einem und demselben Querschnitt zugehören, liegen dann auf einer gebrochenen Linie, die von den Schlusslinien gebildet wird, welche dem gegebenen Querschnitt zugeordnet sind in denjenigen Seilpolygonen aus den concentrirten Kräften, welche jeweilig auf dem Träger stehen. Die Ecken dieser gebrochenen Linie erhält man also, wenn man der Spannweite diejenigen Stellungen gibt, wo eben eine neue concentrirte Kraft auf sie aufläuft, oder sie verlässt. Der grösste in verticaler Richtung gemessene Abstand zwischen dieser gebrochenen Linie und dem Seilpolygon gibt das grösste Moment, das in dem betreffenden

Querschnitte stattfinden kann. Dieser Maximalabstand ist natürlich wieder nur in einer Verticalen zu suchen, welche durch eine Seilpolygon-Ecke geht, woraus folgt, dass auch jetzt in jedem einzelnen Querschnitt das Maximalmoment nur dann statthat, wenn eine der concentrirten Kräfte über ihm steht. Der Querschnitt selbst liegt in der Verticalen, in welcher jener grösste Abschnitt gefunden wurde, und daraus findet sich unmittelbar die Lage der Spannweite selbst in Bezug auf die concentrirten Kräfte.

Wir haben diese Aufgabe in Fig. 40 Taf. XVI für einen Träger ss von 30^m Spannweite, über welchen ein Zug Engerth'scher Locomotiven von rechts nach links fährt, und für denjenigen Querschnitt q desselben durchgeführt, der 10^m von seinem linken Ende entfernt ist. Von der Lage $s_0 s_0$ ausgehend, wo eben die Last P_{15} rechts auf den Träger aufläuft, gaben wir der Spannweite nach und nach die oben näher bezeichneten Lagen $s_1 s_1$, $s_2 s_2 \ldots s_{10} s_{10}$ und dem gegebenen Querschnitt in ihr die Stellungen q_1, $q_2 \ldots$ bis q_{10}. Die durch letzteren Punkt gezogenen Verticalen schneiden die zugehörigen Schlusslinien in den Eckpunkten $q'_0, q'_1 \ldots q'_{10}$ der zu zeichnenden gebrochenen Linie; deren grösster Abstand vom Seilpolygon liegt auf der Verticalen durch die Ecke VIII, und ist folglich das gesuchte Maximalmoment gleich $2{,}67^{cm} = 534^{mt}$. Der gegebene Querschnitt muss dabei unter P_8 liegen, der Träger also die Stellung ss gegen die Räder P_4 bis P_{16}, welche sich auf ihm befinden, einnehmen. Eine Parallele CT zur gehörigen Schlusslinie $\sigma\sigma$ durch den Pol des Kräftepolygons (Fig. 40^a) theilt die Gesammtbelastung 3 16 in die beiden Auflagerdrücke 3 T und T 16.

Weiter als bis zur Lage $s_{10} s_{10}$ brauchten wir für unseren obigen Zweck und unter den angenommenen Verhältnissen die Spannweite nicht zu verschieben, weil sich von jener Lage an alle Umstände, wie sie bei den Stellungen $s_0 s_0$, $s_1 s_1$ u. s. w. stattfinden, genau wiederholen.

Das Fachwerk.

§ 158. Bestimmung der Spannungen in den Constructionstheilen eines Fachwerkes. — Unter einem Fachwerke (vgl. § 40) versteht man eine Construction, die aus geraden prismatischen Theilen, Stäben, Lamellen etc., besteht, deren geometrische Axen in einer und derselben Ebene liegen und die an ihren Enden so mit einander verbunden sind, dass die äusseren, auf das ganze System einwirkenden Kräfte nur Zug oder Druckspannungen in ihnen hervorbringen können. Für die Bestimmung dieser Spannungen haben wir früher, in den §§ 40 und 55, eine Methode angegeben, die sog. Schnittmethode, bei welcher ein Theil des Fachwerkes durch einen Schnitt von den übrigen getrennt wird und die Spannungen in den durchschnittenen Constructionstheilen durch Zerlegen der Resultante der auf das abgeschnittene Stück wirkenden äusseren Kräfte (§ 40) oder mit Anwendung der Drehungsmomente (§ 55) gefunden werden. Es gibt aber noch eine andere Methode, die bedeutende Vorzüge vor jener besitzt, weil sie die gesuchten Spannungen in eine einfache, sehr übersichtliche Figur zusammenstellt, bei deren Construction sich am Schlusse von selber Controlen über die Richtigkeit der ausgeführten Operationen ergeben. Diese Methode wurde zuerst von Clerk Maxwell[1]) aus der Theorie der reciproken Figuren abgeleitet, aber auch unabhängig davon von einem Zeichner, Taylor, im technischen Bureau des Unternehmers J. B. Cochrane entdeckt und angewendet[2]). Cremona[3]) endlich hat die Theorie der reciproken Figuren und ihre Anwendung auf die Fachwerke weiter ausgebildet und fester begründet mit Hülfe der reciproken Polyeder von Möbius (s. §§ 66, 67).

---

[1]) On reciprocal figures and diagrams of forces. Philosophical Magazine, april 1864.

[2]) Vgl. Jenkin „On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains on framework." Transactions of the royal society of Edinburgh, march 1869.

[3]) Le figure reciproche nella statica grafica. Milano 1872.

Erinnern wir uns, dass die Zug- oder Druckspannungen in den Constructionstheilen eines Fachwerkes immer als Paare von Kräften auftreten, welche, in der Axe des Constructionstheils liegend, einander gleich und entgegengesetzt sind. Denken wir uns diese Kräfte an den Enden der betr. geraden Linie, an den Knotenpunkten wirken, in welchen sie mit den dort anstossenden verbunden ist, so muss offenbar jeder solche Knoten unter dem Einfluss der an ihm angebrachten Spannungen sowie der etwa an ihm wirkenden äusseren Kräfte im Gleichgewichte sein. Dazu gehört, dass sich das aus diesen Kräften gebildete Kräftepolygon schliesst. Da aber jede Spannung zweimal vorkommt, an den beiden Enden des betr. Constructionstheils oder der geraden Linie, welche ihn ersetzt, so müssen jene Kräftepolygone paarweise eine Seite gemeinschaftlich haben und können zu einem zusammenhängenden Diagramm vereinigt werden, dessen Linien den entsprechenden Linien des Fachwerkes parallel sind und in welchem jedem geschlossenen Polygon ein Knoten des Fachwerkes entspricht, in dem so viele Linien, einschliesslich derjenigen, in welchen die äusseren Kräfte wirken, zusammentreffen, als jenes Polygon Seiten hat.

Nun haben wir früher (vgl. §§ 20 u. 35) reciproke Figuren so definirt:

„Zwei ebene Figuren sind reciprok, wenn sie aus einer gleichen Anzahl von Linien bestehen so, dass einander entsprechende Linien in beiden Figuren parallel sind und correspondirende Linien, welche sich in der einen Figur in einem Punkt schneiden, in der anderen ein geschlossenes Polygon bilden[1]).“

Hält man dies mit obiger Ausführung zusammen, so folgt unmittelbar der Satz:

„Wenn man Kräfte, welche der Grösse nach durch die Linien einer von zwei reciproken Figuren dargestellt werden, zwischen den Enden der correspondirenden Linien des anderen Diagrammes als Spannungen dieser Linien anbringt, dann sind die Knotenpunkte des letzteren Diagrammes unter dem Einfluss der an ihnen wirkenden Kräfte im Gleichgewicht[2]).“

Kehren wir nun zu den Betrachtungen des § 67 und zu den Figuren 21^a und 21^b auf Taf. VI zurück. Diese Figuren wurden dort als orthographische Projectionen zweier reciproker Polyeder aufgefasst, von denen der eine, Fig. 21^a, aus einer polyedrischen Haube mit einer Spitze C besteht. Das, in der Projection des anderen dieser Polyeder, in Fig. 21^b, aus den Linien 11, 12 ... 17 gebildete Netz nehmen wir jetzt als ein Fachwerk, auf dessen Knoten 1, 2..5 die äusseren Kräfte P_1, P_2..P_5 einwirken, die für sich im Gleichgewicht sind. Das geschlossene Kräftepolygon derselben ist 012..5 in Fig. 21^a und ihr geschlossenes Seilpolygon I II..V in Fig. 21^b. Das in jene Figur mit feinen, ununterbrochenen Linien eingezeichnete Netz, dessen Seiten 11, 12 ... 17 den Linien 11, 12 ... 17 des Fachwerkes in Fig. 21^b conjugirt sind, kann so aufgefasst werden, dass seine Seiten Kräfte darstellen, welche den Spannungen in jenen Constructionstheilen des Fachwerkes gleich sind. Dem Knoten 5 des Fachwerkes, in welchem die Stäbe 11 und 17 zusammenstossen und an dem die Kraft P_5 wirkt, entspricht das geschlossene Polygon mit den Seiten 5, 11, 17 in der reciproken Figur, und die Seiten 11 und 17 repräsentiren die Grösse der Spannungen in den Linien 11 und 17 des Fachwerkes. Der Sinn dieser Spannungen als Kräfte an dem betrachteten Knoten 5 ergibt sich aus dem der bekannten Kraft P_5: man muss von der Seite 5 jenes Polygons oder Dreieckes auf die Seite 11 und dann auf Seite 17 übergehen. Beide Spannungen sind also Zugspannungen. Dem nächsten Knoten 1, in dem die Constructionstheile 11, 12, 13 des Fachwerkes zusammenstossen und an dem die Kraft P_1 wirkt, entspricht das geschlossene Viereck mit den Seiten 11, 1, 12 und 13 in Fig. 21^a. Von demselben liegt die Seite 11 zugleich im vorigen Polygon, die Kraft, welche durch sie dargestellt wird, ist aber jetzt, als Zug-

[1]) Clerk Maxwell a. a. O. S. 251.
[2]) Clerk Maxwell a. a. O. S. 258.

spannung am Knoten 1, im entgegengesetzten Sinne aufzufassen; an sie schliesst sich die Seite 1 im Sinne der Kraft P_1 und dieser gleich, und daran die Seiten 12 und 13 als Spannungen in den Linien **12** und **13** u. s. w. f.

Die Aufgabe, die Spannungen in den Constructionstheilen (Linien) des Fachwerkes **11**, **12**...**17** in Fig. 21[b] zu bestimmen, läuft also darauf hinaus, die ihnen conjugirten Linien in der reciproken Figur 21[a] zu zeichnen, nachdem das Gleichgewicht der auf die Knoten des Fachwerkes wirkenden äusseren Kräfte $P_1, P_2 .. P_5$ durch das geschlossene Kräfte- und Seilpolygone 0 1 2 .. 5 und I II .. V constatirt worden ist. Die Construction des reciproken Netzes hat aber keine Schwierigkeiten, wenn nur ein solcher Knoten im Fachwerk vorhanden ist, in welchem neben einer bekannten äusseren Kraft nur noch zwei Spannungen wirken, in welchem also nur zwei Linien des Fachwerkes zusammenstossen. Solche Knoten gibt es in unserem Beispiele zwei, den Knoten 5 und 3. Man beginnt mit einem derselben, z. B. mit 5. Von dem ihm entsprechenden Polygon in Fig. 21[a] ist eine Seite, 5, der Grösse, der Richtung und dem Sinne nach bekannt, die Kraft P_5. Man darf also durch deren Endpunkte nur Parallele zu **11** und **17** ziehen, um das Polygon zu erhalten. Durch welchen der beiden Endpunkte von 5 die erste jener Parallelen, 11, gezogen wird, ist nicht gleichgültig. Da diese Seite zugleich dem Polygon für den Knoten 1 angehört, an dem die Kraft P_1 wirkt, die durch die Seite 1 repräsentirt wird, so muss 11 an 1 zu liegen kommen, und folglich durch den Endpunkt 5 von 5 gezogen werden. 17 muss natürlich dann durch den Anfangspunkt 4 von 5 gehen. In dem so gezeichneten Dreieck ist der Sinn der Seite 5 gegeben. Damit ist auch der Sinn der Seiten 11 und 17 bestimmt, wie bereits oben erörtert. Man thut gut, den so festgestellten Sinn der an den Knoten 5 wirkenden Spannungen sogleich durch Pfeile in die Fig. 21[b] einzutragen und diesen entgegengesetzte Pfeile an den anderen Endpunkten 1 und 4 der Linien **11** und **17** einzuzeichnen. Man bezeichnet damit zugleich diejenigen Spannungen die gefunden sind.

Vom Knoten 5 geht man nun auf einen von denjenigen beiden Knoten über, mit welchen er durch die Seiten **11** und **17** in Verbindung steht, in welchem ausser jener verbindenden Seite nur noch zwei andere zusammenstossen. Dies ist in unserem Beispiele nur beim Knoten 1 der Fall. Das diesem entsprechende geschlossene Polygon, ein Dreieck, ist bereits zum Theil gezeichnet. Die Seite 11, nur im entgegengesetzten Sinn wie vorher, im Sinn des Pfeiles am Knoten 1, hat es mit dem vorigen Polygon gemeinschaftlich und daran ist die Seite 1, welche die Kraft P_1 repräsentirt, im richtigen Sinn gereiht. Indem man durch den Anfangspunkt der Seite 11 die Parallele 13 zu **13** und durch den Endpunkt von 1 die Parallele 12 zu **12** zieht, vollendet man das Viereck. Dabei ist 12 durch den Endpunkt von 1 desshalb zu ziehen, damit es neben die Seite 2 des nächsten Polygons zu liegen kommt, das dem Knoten 2 entspricht und dem jene Seite ebenfalls angehören muss. Der Sinn der Seiten 12 und 13 ergibt sich aus dem der Seiten 11 und 1 und ist wieder durch Pfeile an den Knoten 1 einzutragen; daraus folgen die entgegengesetzten Pfeile in denselben Linien an den Knoten 2 und 4.

In gleicher Weise kann nun das dem Knoten 2 entsprechende Viereck 12, 2, 14, 15 in Fig. 21[a] gezeichnet werden; von dem, dem nächsten Knoten 3 entsprechenden Dreieck sind dann bereits zwei Seiten, 14 und 3, gezeichnet, die dritte, 16, ist dadurch bestimmt und muss von selber parallel zu **16** werden. Dem nächsten und letzten Knoten 4 endlich entspricht das Fünfeck mit den Seiten 17, 13, 15, 16, 4, das bereits vollständig fertig ist. Der Sinn dieser Seiten, der durch die an den Knoten 4 gezeichneten Pfeile bestimmt ist, muss ihrer Aneinanderreihung zu einem geschlossenen Polygon entsprechen.

Wie man sieht, haben wir zur obigen Lösung der Aufgabe, die Spannungen in den Constructionstheilen des Fachwerkes in Fig. 21[b] zu finden, das Seilpolygon in letzterer Figur gar nicht gebraucht. Wenn dasselbe also nicht aus anderen Gründen construirt werden muss, wie z. B. zur Auffindung einer oder mehrerer der äusseren Kräfte $P_1, P_2 .. P_5$, so kann es ganz weg gelassen werden.

§ 159. Die Anwendbarkeit des soeben gezeigten Verfahrens hängt, wie wir gesehen haben, erstens davon ab, dass ein Knoten vorhanden ist, an welchem neben einer bekannten äusseren Kraft nur noch zwei unbekannte Spannungen wirken, in dem also nur zwei Constructionstheile zusammenstossen. Zweitens muss die Reihenfolge der Knoten so gewählt werden können, dass an jedem neuen immer nur noch zwei Constructionstheile vorhanden sind, deren Spannungen gefunden werden sollen, weil eben in einem geschlossenen Polygon, von dem die Richtungen aller Seiten gegeben sind, nur zwei Seiten ihrer Grösse nach unbekannt sein dürfen, wenn sie bestimmt werden wollen. Treffen diese Voraussetzungen nicht zu, so kann man unter Umständen durch Hülfsconstructionen eine oder die andere der unbekannten Spannungen an den betr. Knoten finden, und so vielleicht die Anzahl der unbekannten Spannungen auf zwei zurückführen, so dass das dem Knoten entsprechende Polygon gezeichnet werden kann. Wie das zu machen ist, werden wir später (§ 163) an einem Beispiel zeigen. Aber ob eine solche Hülfsconstruction, wenn sie nothwendig wird, auch immer gefunden werden kann, ob überhaupt die Lösung der Aufgabe, die Spannungen in den Constructionstheilen eines vorgegebenen Fachwerkes zu finden, möglich und bestimmt ist, das sind Fragen, die man sich eigentlich schon vor dem Beginn einer solchen Lösung vorlegen sollte, und mit denen wir uns nun im Allgemeinen beschäftigen wollen.

Die Zahl der Unbekannten unserer Aufgabe ist so gross, als die Anzahl der Constructionstheile (Stäbe, Linien) des Fachwerkes; denn da die Spannungen in denselben ihrer Richtung nach mit den Linien übereinstimmen und ihr Sinn der doppelte ist, der in dieser Richtung liegt, so bleibt nur ihre Grösse zu bestimmen. Wir werden die Anzahl der Linien des Fachwerkes mit λ bezeichnen und damit also zugleich die Anzahl der zu findenden Unbekannten.

Die an jedem einzelnen Knoten eines Fachwerkes wirkenden Kräfte, die äusseren, als bekannt vorauszusetzenden sowohl, als auch die Spannungen der in ihm zusammenstossenden Constructionstheile, müssen für den Fall des Gleichgewichts des Fachwerkes je für sich im Gleichgewicht sein. Kräfte aber, die an einem und demselben Angriffspunkt wirken, haben nach § 13 zwei Bedingungen (Gleichungen) zu erfüllen, damit sie im Gleichgewichte sind. Die Summen ihrer Projectionen auf zwei Richtungen in ihrer Ebene müssen gleich Null sein. Hat also das Fachwerk ν Knotenpunkte, so erhalten wir 2ν Bedingungen. Die Kräfte aber, welche denselben unterworfen sind, zerfallen in zwei, wesentlich von einander verschiedene Gruppen: in die inneren Kräfte oder Spannungen, und in die sog. äusseren Kräfte. Jene kommen nur paarweise vor; und jedes Paar für sich ist im Gleichgewicht, folglich müssen auch die äusseren Kräfte für sich im Gleichgewicht sein, was auch schon von vorn herein einleuchtet, wenn man das Fachwerk als Ganzes auffässt. Da dies aber Kräfte sind, die, in einer Ebene liegend, an verschiedenen Punkten wirken, so haben sie nach § 50 drei Bedingungen zu erfüllen: die Summen ihrer Projectionen auf zwei Richtungen in ihrer Ebene und die Summe ihrer Drehungsmomente um einen Punkt derselben Ebene muss Null werden. Diese drei Bedingungen müssen natürlich in jenen 2ν mit enthalten sein; für die Auffindung der inneren Kräfte oder Spannungen bleiben also nur noch $2\nu - 3$ Bedingungen übrig, welche nur eben so viele Unbekannte in bestimmter Weise finden lassen. Nun ist aber die Zahl der Unbekannten λ und es muss also

$$2\nu - 3 = \lambda$$

sein, wenn unsere Aufgabe eine bestimmte Lösung zulassen soll.

Die Aufgabe, die Spannungen in den Constructionstheilen eines Fachwerkes zu finden, an dem die äusseren Kräfte bekannt und ins Gleichgewicht gesetzt sind, ist eine bestimmte, wenn die Zahl der Constructionstheile gleich der doppelten Anzahl der Knoten weniger 3 ist. Ein solches Fachwerksystem heisst ein statisch bestimmtes.

Wenn $\lambda < 2\nu - 3$, wenn etwa $\lambda = 2\nu - 3 - \varkappa$ ist, so könnten noch $\varkappa$ Verbindungsstücke, Stäbe, in das Fachwerk eingesetzt werden und ihre Spannungen wären noch vollständig bestimmt. Geschieht das nicht, so bleiben nach Elimination der λ unbekannten Spannungen noch $\varkappa$ Bedingungen übrig, die das System und die von aussen auf sie wirkenden Kräfte zu erfüllen haben. Es besteht also eine Abhängigkeit zwischen letzteren und der Gestalt des Fachwerkes, diese ist also mit den äusseren Kräften veränderlich, und desshalb heisst ein solches Fachwerk ein *veränderliches*. Die *Kette* und der *Bogen*, die wir früher behandelten (§ 144) sind Beispiele solcher Systeme.

Ist dagegen $\lambda > 2\nu - 3$, etwa $\lambda = 2\nu - 3 + \varkappa$, so können aus den $2\nu - 3$ Bedingungen nicht alle Unbekannten gefunden werden; man entferne $\varkappa$ Verbindungsstücke; in den $\lambda - \varkappa$ übrigen sind dann die Spannungen vollständig bestimmt. Werden dann jene $\varkappa$ wieder angefügt, so kann dies so geschehen, dass die Spannungen in ihnen Null werden; dann ändert sich an dem Zustande der anderen nichts, sie selber sind also überflüssig. Fügt man sie aber so ein, dass sie Spannungen aufnehmen, so ändern sich dadurch die Spannungen in den anderen und man kann so durch Beanspruchung der angefügten Theile die Spannungen in den anderen zwischen gewissen Grenzen beliebig ändern. Solche Systeme heissen desshalb *statisch unbestimmte* oder Fachwerke mit *überflüssigen* Constructionstheilen.

Dabei dachten wir uns die einzelnen Theile, aus dem das Fachwerk besteht, als *starre* gerade Linien; wenn sie, wie es in Wirklichkeit immer der Fall ist, *elastisch* sind, dann sind die Spannungen in ihnen immer vollständig bestimmt, wie gross auch ihre Anzahl sein mag. Wir können darauf nicht näher eingehen, sondern beschränken uns auf die Bemerkung, dass die Anwendung solcher statisch unbestimmter Fachwerke immer nur mit der grössten Vorsicht zu geschehen hat. Die durch Rechnung oder Construction gefundenen Spannungen in ihren Theilen haben nur dann diese Grössen in Wirklichkeit, wenn bei der Herstellung die Dimensionen der einzelnen Bestandtheile genau so eingehalten worden sind, wie sie bei der Rechnung oder Construction zu Grunde lagen; ganz geringe Abweichungen, besonders in den Längen, können ganz beträchtlich andere Spannungen nach sich ziehen als gefunden und bei der Dimensionirung der Bestandtheile zu Grunde gelegt wurden.

Das in Fig. 21 Taf. VI als Beispiel gewählte Fachwerk hat $\nu = 5$ Knoten und $\lambda = 7$ Linien. Es ist $2 \times 5 - 3 = 7$; das System ist ein statisch bestimmtes, und in der That haben wir ja auch im vorigen § die Spannungen in seinen Constructionstheilen in völlig bestimmter Weise gefunden.

§ **160.** Bei den Betrachtungen in den beiden vorhergehenden §§ setzten wir voraus, dass die an dem Fachwerk wirkenden äusseren Kräfte im Gleichgewicht sind. In Wirklichkeit sind unter diesen Kräften immer Reactionen von Fix- oder Stütz- oder Aufhängepunkten, die erst gefunden werden müssen, vermittelst der Bedingung, dass sie mit den gegebenen äusseren Kräften, meist Belastungen, im freien Gleichgewicht sind. Die Aufgabe, jene Reactionen zu finden, ist aber (nach § 38) nur in drei Fällen eine solche, die eine *bestimmte* Lösung zulässt: Wenn nur *ein* Fix- und *ein* Stützpunkt vorhanden ist, oder wenn das Fachwerk in zwei Stützpunkten aufliegt, in denen die Normalen an die Stützfläche parallel zu einander und zugleich parallel zur Resultante der gegebenen Kräfte sind, oder endlich, wenn drei Stützpunkte vorhanden sind, deren Normalen sich in drei verschiedenen Punkten schneiden, von denen keiner auf der Resultante der gegebenen Kräfte liegt, oder zu zweien parallel sind, aber nicht zugleich zur Resultante, und von der dritten geschnitten werden. Um in diesen drei Fällen die Reactionen, welche mit den gegebenen äusseren Kräften im freien Gleichgewicht sein müssen, zu finden, muss im Allgemeinen das Kräfte- sowohl als auch das Seilpolygon aus sämmtlichen äusseren Kräften gezeichnet werden, welch' beide den Bedingungen des § 33 gemäss sich schliessen müssen. Zur Auffindung der Spannungen in den Constructionstheilen ist, wie oben gezeigt, nur das Kräftepolygon erforderlich. Wenn daher jene Reactionen gefunden

werden können, ohne dass das Seilpolygon gezeichnet werden muss, wie das oft vorkommt, so kann dieses ganz wegbleiben.

In dem Falle, wo die Befestigung oder Stützung etc. des Fachwerks eine unvollständige ist, so dass seine Lage im Ganzen von den äusseren Kräften abhängig ist, oder umgekehrt diese gewisse Bedingungen erfüllen müssen (vgl. § 38), da sind wieder zunächst mittelst des Kräfte- und Seilpolygons jene Nebenbedingungen zu erfüllen und zugleich die Reaction der Stütz-, Fix- oder Aufhängepunkte zu finden. Die Bedingungen für die Bestimmtheit der Aufgabe, die Spannungen in den Constructionstheilen zu finden, und die Lösungen dieser Aufgabe bleiben dann dieselben wie vorher (vgl. unten § 165).

Wenn endlich das Fachwerk überflüssig befestigt ist, wenn es z. B. zwei Fixpunkte oder mehr hat und etwa noch Stützpunkte dazu, so können die Reactionen derselben nach dem in § 38 angegebenen Verfahren, nach welchem das Fachwerk als starres Ganze zu betrachten wäre, nicht mehr bestimmt gefunden werden, und die gegebenen äusseren, auf das Fachwerk einwirkenden Kräfte, Belastungen, unterliegen keinen Bedingungen mehr. Bezeichnet dann ν' die Anzahl der freien Knotenpunkte des Fachwerkes und λ wieder die Zahl seiner Constructionstheile oder Linien, so sind wieder λ unbekannte Spannungen zu finden aus $2\nu'$ Bedingungen, welche davon herrühren, dass die ν' freien Knotenpunkte unter dem Einfluss der an ihnen wirkenden Kräfte, der gegebenen äusseren und der Spannungen der in ihnen zusammenstossenden Constructionstheile, im freien Gleichgewicht sein müssen. Daraus folgt der Satz:

> Wenn ein Fachwerk überflüssig befestigt ist, dann ist die Aufgabe, die Spannungen in seinen Constructionstheilen zu finden, möglich und bestimmt, wenn die Anzahl seiner Linien gleich der doppelten Anzahl seiner freien Knoten ist.

Aus den Spannungen derjenigen Constructionstheile, mit denen das Fachwerk mit den Fix- oder Stützpunkten in Verbindung steht, folgen dann unmittelbar die Einwirkungen auf diese und folglich auch die Reactionen derselben, die mit den gegebenen äusseren Kräften in Gleichgewicht sein müssen. Daraus ergeben sich dann wieder Controlen für die Richtigkeit oder Genauigkeit der Construction.

Für die Fälle, wo λ kleiner oder grösser als $2\nu'$ ist, gelten genau dieselben Betrachtungen, wie wir sie im § 159 für Fachwerke anstellten, die zuvor ins freie Gleichgewicht gesetzt waren[1]).

Das in Fig. 72[b] dargestellte Fachwerk mit den drei Fixpunkten A, B, C ist ein solch überflüssig befestigtes. Da die Zahl der freien Knoten D, E, F, G gleich 4 und die Anzahl der Linien gleich 8 ist, so ist $2\nu' = \lambda$, also das Fachwerk ein statisch bestimmtes. In der That können wir die Spannungen in jenen acht Linien auf folgende Weise finden:

Die gegebenen äusseren Kräfte, die Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 an den freien Knotenpunkten, brauchen keinerlei Bedingungen zu erfüllen; wir brauchen also das Kräfte- und Seilpolygon aus ihnen nicht zu zeichnen. Es ist ferner nur ein Knotenpunkt, E, vorhanden, an dem ausser der bekannten äusseren Kraft nur noch zwei Spannungen wirken; mit ihm müssen wir also die Construction beginnen. Nachdem man in Fig. 72[a] die Kraft $P_2 = 2$ abgetragen, zieht man durch deren Endpunkte Parallele zu den Linien 11 und 9 in Fig. 72[b], und erhält so das dem Knoten E entsprechende Dreieck mit den Seiten 2. 9. 11. deren Sinn durch den gegebenen der Kraft P_2, also der Seite 2, bestimmt ist und in Fig. 72[b] an den Knoten E und dann auch an die Knoten D und F eingetragen werden kann.

[1]) Die oben erhaltenen Beziehungen zwischen der Anzahl der Knoten und Linien in statisch bestimmten, oder veränderlichen, oder solchen Fachwerken, welche überflüssige Constructionstheile besitzen, habe ich schon im Jahre 1859 in einem, „Versuch einer Theorie der Ketten- und Fachwerkbrücken" betitelten Programm zum Jahresbericht der kgl. bayer. Gewerb- und Handelsschule zu Fürth entwickelt.

In den Linien 9 und 11 herrschen also Zugspannungen. Vom Knoten E kann man zum Knoten D oder F übergehen. Nehmen wir ersteren, so ist in Fig. 72ª an 11 die Kraft P_4 gleich 4 anzufügen und das dem Knoten entsprechende Viereck zu schliessen, indem man durch den Anfangspunkt von 11 eine Parallele 10 zu 10 und durch den Endpunkt von 4 eine Parallele 12 zu 12 zieht. Der Sinn der letzteren Seiten als Spannungen an dem Punkte D ergibt sich aus dem der beiden anderen Seiten und damit auch der Sinn der Spannung in der Linie 10 am Knoten G und der Sinn der Einwirkung, welche die Linie 12 auf den Fixpunkt C ausübt. An dem Knoten G sind nun noch drei Spannungen unbekannt, wir müssen daher zuerst noch an den Knoten F gehen. An die, an demselben wirkende Spannung der Linie 9, in Fig. 72ª durch 9 repräsentirt, setzen wir, rückwärts gehend, die Kraft P_1 gleich 1[1]) an und ziehen durch den Anfang dieser letzteren Seite eine Parallele 5 zu 5 und durch den Endpunkt von 9 eine Parallele 8 zu 8, wodurch das dem Knoten F entsprechende Viereck mit den Seiten 1, 9, 8, 5 geschlossen wird. Der Sinn der Spannungen in den Seiten 5 und 8 ist durch den Sinn der beiden anderen bedingt und in obiger Reihenfolge ausgesprochen. In 5 herrscht also Zug- in 8 Druckspannung.

Nun sind am Knoten G nur noch zwei Spannungen, die in den Linien 6 und 7, unbekannt. Die bekannten Spannungen in den Seiten 8 und 10 sind in Fig. 72ª bereits aneinander gefügt; ihnen setzen wir, rückwärts gehend, P_3 gleich 3 an und schliessen dann das dem Knoten entsprechende Fünfeck, indem wir durch den Anfangspunkt von 3 eine Paralelle 6 zu 6 und durch den Endpunkt von 10 eine Parallele 7 zu 7 ziehen. Der Sinn der Spannungen in den Seiten 6 und 7 ergibt sich wie immer und damit sind die Spannungen in sämmtlichen Constructionstheilen des Fachwerkes gefunden.

Bringt man an den Knoten F, G, D die Spannungen der Seiten 5, 6, 7 und 12, durch welche sie mit den Fixpunkten A, B, C zusammenhängen, an, so wird dadurch das Fachwerk F G D E ins freie Gleichgewicht gesetzt. Desshalb muss das Kräfte- und Seilpolygon aus den gegebenen äusseren Kräften $P_1 .. P_4$ und jenen Spannungen oder Reactionen sich schliessen. Auf das Seilpolygon, das erst ganz gezeichnet werden müsste, verzichten wir; das Kräftepolygon ist aber grösstentheils schon gezeichnet in Fig. 72ª. Die Kräfte 1, 2, 4 und die Spannungen 12, 7, 6 sind bereits ihrer Grösse, ihrer Richtung und ihrem Sinne nach an einander gereiht. Trägt man daher vom Endpunkt der Spannung 6 aus noch die Spannung 5 auf, so muss als Genauigkeitsprobe zwischen dem Endpunkt 0 von 5 und dem Anfangspunkt der Kraft 1 eine Strecke gleich der Kraft P_3 zu liegen kommen. Dann ist der bei 0 beginnende Kräftezug 3, 1, 2, 4, 12, 7, 6, 5 geschlossen.

Das ins freie Gleichgewicht gesetzte Fachwerk D E F G mit 4 Seiten und 4 Knoten ist kein statisch bestimmtes mehr; es ist $\lambda < 2\nu - 3$, und folglich gehört das Fachwerk zu den veränder-

[1]) Wenn in den mit feinen Ziffern bezeichneten Linien der Figuren a) Zwischenpunkte vorkommen, so schreiben wir, um Irrungen vorzubeugen, diese Ziffern doppelt, an beide Enden oder nahe an beide Enden der betr. Linie.

lichen, wie ja auch direct leicht zu sehen. Es wird erst dadurch, dass es überflüssig befestigt ist, zu einem statisch bestimmten.

§ 161. Beispiele für die Bestimmung der Spannungen in den Constructionstheilen statisch bestimmter Fachwerke. — In den Figuren 41 bis 44 auf Taf. XVII wählen wir ein sehr häufig angewendetes Fachwerk [1]), das sich in seinen Endpunkten A, B auf Unterlagen so stützt, dass die Auflager-Reactionen vertical aufwärts gerichtet werden, parallel zu den übrigen äusseren Kräften, welche lauter vertical abwärts gerichtete Belastungen sind. Diese Auflager-Reactionen sind also aus der Bedingung, dass sie mit den gegebenen Belastungen im freien Gleichgewicht sein müssen, leicht zu finden. Bezeichnet man ferner mit n die Anzahl der Knotenpunkte in der oberen Gurtung, so ist $n-1$ die der Knoten in der unteren Gurtung, folglich die Gesammtzahl $\nu = 2n-1$. Die Anzahl der Linien ist, wie leicht zu sehen $\lambda = (n-1) + (n-2) + (n-1) + (n-1) = 4n-5$ und daher $2\nu - 3$ immer gleich λ, das Fachwerk also statisch bestimmt.

In Fig. 41ᵇ Taf. XVII ist die Belastung als gleichmässig über die untere Gurtung ausgebreitet angenommen, und als die einander gleichen Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_8$ an den Knotenpunkten dieser Gurten angebracht gedacht. Die Auflager-Reactionen P_9 und P_{10} sind also gleich gross und je gleich der Hälfte der Summe jener Belastungen. Sie können gefunden werden ohne Seilpolygon, selbst ohne Kräftepolygon und braucht folglich ersteres überhaupt nicht gezeichnet zu werden. Das geschlossene Kräftepolygon 0 1 2 ... 10 ist in Fig. 41ᵃ aufgetragen.

Die Construction der inneren Kräfte oder Spannungen muss mit einem der Punkte A oder B beginnen, weil bloss in diesen eine äussere Kraft wirkt und nur zwei Linien zusammenkommen. Beginnen wir bei A, so ist das ihm entsprechende geschlossene Polygon das Dreieck mit den Seiten 10, 11, 12 [2]), deren Sinn sich durch den der ersten Seite bestimmt. In **11** herrscht also Zug-, in **12** Druckspannung; die betr. Pfeile sind an den Knoten A und an die mit ihm zusammenhängenden beiden Knoten einzutragen. Das Dreieck musste so gezeichnet werden, dass durch den Endpunkt der Seite 10, der zugleich Anfangspunkt der Seite 1 ist, die Parallele zu **11** gezogen wurde, weil die Seite 11 den Polygonen für den Knoten A und den ersten Knoten der unteren Gurtung, an dem P_1 wirkt, gemeinschaftlich werden muss.

Der nächste Knoten wird der erste (links) in der unteren Gurtung, weil nur in diesem bloss zwei unbekannte Spannungen vorkommen. Von dem geschlossenen Polygon, das diesem Knoten entspricht, ein Viereck, sind die Seiten 11 und 1 schon gezeichnet, die zu **13** und **14** parallelen Seiten 13 und 14, welche das Polygon schliessen, sind vollkommen bestimmt. Dabei wird man 14 durch den Endpunkt von 1 oder Anfangspunkt von 2 ziehen, weil sie zugleich dem Polygon desjenigen Knotens angehört, an dem P_2 wirkt. Hierauf kann man auf den zweiten Knoten der oberen Gurtung übergehen, an dem keine äussere Kraft, bloss vier Spannungen wirken, von denen zwei, die in **12** und **13**, bereits bekannt sind. Die denselben conjugirten Seiten 12 und 13 in dem geschlossenen Polygon des Knotens sind schon gezeichnet. Indem man durch den Anfangspunkt von 12 eine Parallele 16 zu **16** und durch den Endpunkt von 13 eine Parallele 15 zu **15** zieht, vollendet man das Polygon, das hier ein Viereck von eigenthümlicher Gestalt wird, ein solches, bei dem zwei Seiten 16 und 12 in eine und dieselbe gerade Linie fallen.

Nun geht man weiter an den zweiten Knoten der unteren Gurtung, dann an den dritten Knoten der oberen Gurtung u. s. w. f. bis man zuletzt an den letzten Knoten B der oberen Gurtung kommt, dessen entsprechendes Polygon, ein Dreieck (9, 40, 41), alsdann bereits vollständig gezeichnet ist und stimmen muss. So erhält man die symmetrische Fig. 41ᵃ als reciproke zu 41ᵇ. Im Verlaufe der

[1]) Nach Fleeming Jenkin in „Transactions of the royal society of Edinburgh", march 1869, Plate XVII.

[2]) An den Seiten des Kräftepolygons, die ohnedies schon mit 0 1, 1 2 ... 8 9, 9 10 bezeichnet sind, lassen wir die Bezifferung 1, 2, 3 ... in den Figuren a) fort, da sie leicht in Gedanken zu ergänzen ist.

Construction findet sich, dass die Spannungen in den Linien 25 und 27 Null werden; deren conjugirte fehlen also in Fig. 41ª; die durch den Anfangspunkt von 23 z. B. gezogene Parallele zu 25 wird von der durch den Endpunkt von 4 gezogenen Parallelen zu 26 in jenem Anfangspunkt selbst geschnitten, 25 wird also Null.

In Fig. 42ᵇ Taf. XVII sind die Lasten an den vier ersten Knoten der unteren Gurtung wieder unter sich gleich, aber grösser als die ebenfalls unter sich gleichen Belastungen der letzten vier Knotenpunkte derselben Gurtung. Die Auflager-Reactionen P_9 und P_{10} werden daher verschieden und sind mittelst des Kräfte- und Seilpolygons oder auch dadurch leicht zu finden, dass man die Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_8$ oder die Resultanten aus den Kräften $P_1 \ldots P_4$ und $P_5 \ldots P_8$ im umgekehrten Verhältniss ihrer Entfernungen von den Auflagern auf diese vertheilt. Geschieht das letztere, so hat man wieder nur das Kräftepolygon 0 1 2 ... 10 in Fig. 42ª zu zeichnen.

Die Construction der Spannungen, beim Knoten A beginnend, nimmt ganz denselben Verlauf, wie in Fig. 41 und liefert die zu 42ᵇ reciproke Figur 42ª.

In Fig. 43ᵇ Taf. XVII hat das Fachwerk nur eine einzige concentrirte Last, P_1, am mittleren Knoten der unteren Gurtung zu tragen. Die Auflager-Reactionen P_2 und P_3 werden gleichgross, jede gleich $\frac{1}{2} P_1$; das Seilpolygon ist nicht nothwendig, das Kräftepolygon ist sehr einfach, 0 1 2 3 in Fig. 43ª. Die Construction der Spannungen, im Knoten A beginnend, lässt sich ganz ähnlich durchführen, wie in den beiden vorigen Figuren und ergibt die Fig. 43ª.

In Fig. 44ᵇ Taf. XVII endlich hat das Fachwerk wieder nur eine einzige concentrirte Last, P_1, zu tragen, die aber ausserhalb der Mitte, am dritten Knoten der unteren Gurtung angebracht ist. Die ungleichen Auflager-Reactionen P_2 und P_3 kann man erhalten, ohne das Seilpolygon zu zeichnen, durch Vertheilung von P_1 im umgekehrten Verhältniss seiner Entfernungen von den Punkten A und B auf diese Auflager. Das geschlossene Kräftepolygon in Fig. 44ª ist 0 1 2 3 und an dasselbe schliesst sich der übrige Theil dieser Figur ganz ähnlich an, wie bei den drei vorhergehenden.

§ 162. Als weiteres Beispiel nehmen wir in Fig. 45 Taf. XVIII denselben Dachstuhl oder eigentlich eine Tragwand desselben, für den wir schon in den §§ 40 u. 55 die Spannungen nach der Schnittmethode gefunden haben. Die Dimensionen des Fachwerkes und die darauf einwirkenden Kräfte sind die gleichen wie dort; die beiderseits gleichen Auflager-Reactionen P_{10} und P_{11} können wieder ohne Seilpolygon gefunden werden; das geschlossene Kräftepolygon ist in Fig. 45ª 0 1 2 3 ... 11. Die Anzahl ν sämmtlicher Knoten ist 15 und die der Linien $\lambda = 27$; es ist also $2\nu - 3 = \lambda$ und das Fachwerk ein statisch bestimmtes.

Die Construction der Spannungen beginnt man am Knoten A, an dem die beiden äusseren Kräfte P_1 und P_{11} gegeben und die Spannungen in 12 und 13 unbekannt sind. Das ihm entsprechende Viereck mit den Seiten 11, 1, 12, 13 kann also gezeichnet werden. Man zieht dabei 12 durch den Endpunkt von 1, damit es neben 2 zu liegen kommt, mit dem es in demjenigen geschlossenen Polygon liegt, das dem nächsten Knoten entspricht. Von A geht man auf den Knoten über, an dem die Kraft P_2 angreift, von diesem auf den zunächst darunter liegenden u. s. w. f. Man erhält ohne Schwierigkeit die reciproke Figur 45ª zur gegebenen 45ᵇ.

§ 163. Die Fig. 46ᵇ Taf. XVIII stellt das Schema der Tragwand eines Dachstuhles mit genau denselben Hauptdimensionen dar, wie bei der vorigen, nur die Ausfüllstücke sind anders angeordnet. Wir wählten dieses Beispiel, weil hier bei der Construction der Spannungen eine der Hülfsconstructionen anzuwenden ist, von denen wir im § 159 sprachen. Die Belastungen, und folglich auch die Auflager-Reactionen und das Kräftepolygon in Fig. 46ª sind dieselben, wie beim vorigen Beispiel. Die Anzahl der Knoten ist wieder $\nu = 15$ und die der Linien $\lambda = 27$, ebenfalls wie dort.

Dem Knoten A entspricht das Viereck mit den Seiten 11, 1, 12, 13, durch das die Spannungen in 12 und 13 gefunden werden. Auf den Knoten a übergehend, kennt man von dem, demselben entsprechenden Viereck bereits die Seiten 12 und 2 und kann also die 15 und 14, parallel zu 15 und 14,

anreihen. Nun sind am Knoten b nur noch zwei Spannungen, die in 16 und 17, unbekannt; das ihm entsprechende Viereck kann also gezeichnet werden; es ist das mit den Seiten 13. 14. 16 und 17 von denen zwei, 13 und 17, in eine und dieselbe gerade Linie fallen. Indem man nun aber weiter zu gehen sucht, findet man sowohl an dem Knoten c als an dem d drei unbekannte Spannungen; die denselben entsprechenden Polygone sind also nicht sofort zu zeichnen, man muss sich für einen dieser Knoten noch eine Spannung erst auf einem anderen Wege verschaffen. Das gelingt aber leicht mit der Spannung in der Linie 20, die einerseits im Knoten c endigt. Denn denkt man sich durch den angedeuteten Schnitt den obersten Theil des Fachwerks abgetrennt, so müssen an diesem Stück die Spannungen in den Linien 21. 20. 19. 27 und 26, welche im richtigen Sinn an den Schnittstellen dieser Linien anzubringen sind, den beiden äusseren Kräften P_4 und P_5 das Gleichgewicht halten. Da sich aber die Spannungen in 21. 19. 27 und 26 alle im Punkte g schneiden, durch den also auch ihre Resultante hindurchgeht, so muss der Schnittpunkt dieser Resultante mit der Spannung in 20 auf der geraden Linie liegen, welche die Resultante der beiden Kräfte P_4 und P_5 enthält. Diese Linie aber liegt, wegen der Gleichheit der beiden Kräfte P_4 und P_5, mitten zwischen ihnen und durch ihren Durchschnittspunkt α mit der verlängerten Linie 20, sowie durch den Punkt g muss die Resultante der Spannungen in 21. 19. 27 und 26 gehen. Diese Resultante, sowie die Spannung in 20 kann also nun leicht gefunden werden. In Fig. 46ª sind die Kräfte P_4 und P_5 bereits hintereinander aufgetragen und ihre Resultante 35 gefunden. Zieht man durch 3 eine Parallele zu 20 und durch 5 eine Parallele zu αg, so erhält man in den Dreiecksseiten 5n und n3, in diesem Sinne genommen, bezw. jene Resultante und die Spannung in 20, letztere ist also Zugspannung.

Nun kehren wir zu dem Knoten c zurück, an dem jetzt nur noch die Spannungen in den Linien 18 und 21 unbekannt sind. Die den Linien 16 und 15 conjugirten Seiten 16 und 15 sind in Fig. 46ª in diesem Sinne bereits an einander gereiht, auf sie folgt 3, entsprechend der Kraft P_5. Durch den Endpunkt 3 von 3 zieht man 21 parallel zu 21 und durch den Anfangspunkt von 16 eben so 18 parallel zu 18 und schaltet nun zwischen 21 und 18 das der Grösse und Richtung nach bekannte 20 ein. So entsteht das dem Knoten c entsprechende Sechseck mit den Seiten 16. 15. 3. 21. 20. 18, welche, in dieser Reihenfolge durchlaufen, auch den richtigen Sinn haben und erhalten.

Das Polygon für den Knoten d, an dem jetzt nur noch zwei Spannungen unbekannt sind, kann wieder in der gewöhnlichen Weise gezeichnet werden; überhaupt begegnet man von jetzt an in der Construction der Fig. 46ª keiner Schwierigkeit mehr.

§ **164.** Während wir bisher nur verticale Kräfte, Lasten, auf die Fachwerke einwirken liessen, wollen wir nun in Fig. 47 Taf. XIX als Beispiel die Tragwand eines Dachstuhles nehmen, an welcher ausser solchen verticalen auch schiefe Kräfte, hervorgebracht durch den Winddruck, thätig sind. Fig. 47ᵇ ist das Schema der Fachwerksconstruction, welche zur Ueberdachung der neuen Einsteighallen im Münchener Centralbahnhof angewendet wurde. Ich verdanke dasselbe, nebst den Angaben über die Dimensionen, sowie über Belastung und Winddruck der Güte des Herrn H. Gerber, Director der Süddeutschen Brückenbau-Actiengesellschaft, welche die Ausführung jener schönen und grossartigen Bauwerke übernommen hat. Die Stützweite ist $34{,}64^{m}$, die mittlere Entfernung zweier Tragwände beträgt 10^{m}. Der Träger liegt mit dem einen Ende, A, frei auf, am anderen Ende, bei B, befindet sich ein Fixpunkt. Die durch die äusseren Kräfte hervorgebrachten Einwirkungen auf die Auflager lassen sich also vollständig bestimmen; das System kann frei gemacht werden. Es hat $\nu = 14$ Knotenpunkte und $\lambda = 25$ Constructionstheile; da demnach $2\nu - 3 = \lambda$, so ist das Fachwerk statisch bestimmt.

Für die Berechnung der äusseren Kräfte wurde die ständige Belastung zu 90^{kg} pro Quadratmeter, der Schneedruck zu 78^{kg} pro Quadratmeter, der Winddruck zu 115^{kg} pro Quadratmeter angenommen und die Windrichtung so vorausgesetzt, dass sie einen Winkel von 10^{0} mit der Horizontalen

bildet. Darnach ergeben sich für den Fall, dass der Wind von der linken, von der Seite des Stützpunktes A kommt, folgende Belastungen:

für die Knotenpunkte	a	b	c	d	e	f	g	
Ständige Belastung:	2,45	4,99	5,34	5,62	5,34	4,99	2,45	Tonnen
Schneedruck:	2,13	4,33	4,63	4,87	4,63	4,33	2,13	„
Winddruck und zwar								
a) verticale Componente:	1,58	2,81	1,94	1,07	Tonnen			
b) horizontale Componente:	1,19	1,81	0,94	0,48 [1])	„			

Letztere Kräfte wirken symmetrisch an den Knoten g, f, e, d, wenn der Wind von der anderen Seite kommt.

Die aus jenen Kräften sich ergebenden Resultanten an den einzelnen Knotenpunkten wurden in Fig. 47ª zum Kräftepolygon 0 1 2 ... 7 an einander gereiht. Um die Auflager-Reactionen zu finden, müsste zu diesem Kräfte- das Seilpolygon gezeichnet und die dadurch gefundene Resultante obiger Kräfte in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in verticaler Richtung durch A geht, die andere in der Verbindungslinie des Fixpunktes B mit dem Schnittpunkt jener Componente und der Resultante liegt. Da aber dieser Schnittpunkt hier sehr weit hinausfällt, so haben wir es vorgezogen, die verticale Auflager-Reaction in A auf die bekannte Weise zu berechnen. Indem man sie ins Kräftepolygon als 8 9 einträgt und dieses durch die Linie 7 8 schliesst, erhält man in letzterer die Auflager-Reaction im Fixpunkte B. Das Seilpolygon ist überflüssig.

Die Construction der Spannungen muss beim Knoten a oder g begonnen werden. Das geschlossene Polygon, das ersterem Knoten entspricht, ist in Fig. 47ª das Dreieck mit den Seiten 1, 11, 10, von denen die Seite 1 gegeben ist. Die anderen, welche parallel zu **10** und **11** sein müssen, sind dadurch bestimmt und ergibt sich zugleich ihr Sinn aus dem von 1. Dabei ist 10 durch den Anfangs- und 11 durch den Endpunkt von 1 zu ziehen, damit erstere Seite neben die Kraft 9 (die Auflager-Reaction in A) und letztere neben die Kraft 2 zu liegen kommt, mit denen jene Seiten in geschlossenen, den Punkten A und b entsprechenden Polygonen liegen müssen. Das erstere dieser beiden Polygone kann nun gezeichnet werden, da es nur noch zwei unbekannte Seiten hat. Die bekannten Seiten sind 9 und 10, in dieser Ordnung an einander gereiht; durch den Endpunkt von 10 eine Parallele 12 zu **12** und durch den Anfangspunkt 8 von 9 eine Parallele 13 zu **13** gezogen, vollendet das dem Punkte A entsprechende Viereck 9, 10, 12, 13, in welchem der Sinn der Seiten durch die Ordnung, in welcher sie geschrieben sind, ausgesprochen und durch den Sinn der beiden bekannten bestimmt ist. In diesem Viereck fallen wieder zwei Seiten, 9 und 10, in eine und dieselbe Gerade. Vom Knoten A geht man zum Knoten h, dem das Dreieck 13, 14, 15 entspricht, von hier zum Knoten b u. s. w. f. Das dem Knoten f entsprechende Sechseck mit den Seiten 30, 28, 27, 6, 33 und 32 reducirt sich auf ein Fünfeck, weil die, durch den Anfangspunkt von 30 gezogene Parallele 32 zu **32** durch den Endpunkt 6 von 6 geht, durch den die Parallele 33 zu **33** gelegt werden müsste. Die Seite 33 wird also Null und damit auch die Spannung in **33**. Das dem Knoten g entsprechende Dreieck reducirt sich dadurch auf ein Zweieck mit den einander gleichen und entgegengesetzten Seiten 7 und 34.

In Fig. 47ª' wurde das Diagramm der Spannungen unter der Annahme gezeichnet, dass der Wind von der entgegengesetzten Seite, von der des Fixpunktes B kommt. Die Reaction dieses Punktes wird, wie leicht zu sehen, nicht symmetrisch zu derjenigen im vorigen Fall: sie wird grösser und steiler. Beginnt man die Construction der Spannungen wieder am Knoten a, so wird in dem, demselben entsprechenden Dreieck eine Seite, die Parallele zu **11**, gleich Null; es besteht nur

[1]) Bei Berechnung der vier Zahlen für den Winddruck an den Knoten c und d war ein Aufsatz über dem Knoten d, der die Abzugsöffnungen für den Dampf und Rauch enthält, mit zu berücksichtigen.

aus den beiden gleichen und entgegengesetzten Seiten 1 und 10. Uebrigens kann die Construction des Diagrammes genau so durchgeführt werden wie vorhin. Die Gestalt desselben wird natürlich anders.

§ 165. In dem Beispiel[1]) Fig. 48 Taf. XIX ist ein ähnliches Fachwerk, wie wir es schon im § 161 behandelten, in den Knotenpunkten A und B aufgehängt; es bildet eine versteifte Hängebrücke. Die Zugspannungen in den Aufhängeketten 9 und 17 müssen sich in einem Punkte der Resultante der Lasten P_1, $P_2 \ldots P_{16}$ schneiden. Dieser Punkt kann im Allgemeinen willkürlich gewählt werden, aus ihm ergeben sich dann die Richtungen jener Stücke und die Spannungen in denselben durch Zerlegung der Resultante. Sind, wie in Fig. 48^b angenommen, die Kräfte an den oberen Knotenpunkten sowohl, als auch die an den unteren unter sich gleich, dann liegt, da das Fachwerk symmetrisch um eine Mittellinie angeordnet ist, die Resultante jener Kräfte in dieser Mittellinie und die Spannungen in 9 und 17 haben gleiche Neigung. Das Kräftepolygon für die Reihenfolge der äusseren Kräfte P_1 bis P_{17}, wie sie durch die Bezifferung derselben bestimmt wird, ist in Fig. 48^a gezeichnet, als 0 1 2 ... 8 9 10 ... 16 17, und ist, nachdem man einmal über die Richtungen von P_9 und P_{17} verfügt hat, leicht zu erhalten. Es reicht für die Bestimmung der Grösse dieser Kräfte vollständig aus, das Seilpolygon ist überflüssig. Dass das Fachwerk ein statisch bestimmtes ist, geht schon aus den Betrachtungen des § 161 hervor.

Die Construction der Spannungen beginnt man mit dem Knoten A und ist das denselben entsprechende Viereck mit den Seiten 17, 1, 18, 19 vollständig bestimmt; die vorstehende Ordnung der Seiten, bedingt durch den Sinn von 17 und 1, bestimmt sogleich den Sinn von 18 und 19 als Zugspannungen. Von A geht man auf den Knoten über, an dem P_{16} wirkt, und dem das Viereck mit den Seiten 16, 19, 20, 21 entspricht, von denen erstere schon gezeichnet und dem Sinne nach bekannt sind, letztere aber durch jene der Grösse und dem Sinne nach bestimmt werden. In 20 herrscht also Druck-, in 21 Zugspannung. Nun geht man auf den Knoten über, an dem P_2 wirkt, dann an den mit der Kraft P_{15} u. s. w. f. Die Construction des Diagrammes in Fig. 48^a hat keine Schwierigkeit.

§ 166. In Fig. 49 Taf. XX wählen wir ferner als Beispiel die eine Hälfte des Dachstuhles einer Locomotiven-Remise[2]), auf welche die vertical abwärts gerichteten und als gegeben vorausgesetzten Kräfte $P_1, P_2 .. P_5$ einwirken. Die Resultante derselben wird durch das Kräftepolygon 0 1 2 .. 5 in Fig. 49^a und das für den Pol C desselben in Fig. 49^b construirte Seilpolygon 0 I II .. V VI gefunden. Sie geht durch den Durchschnittspunkt α der äussersten Seiten des letzteren und ist an Grösse, Richtung und Sinn gleich 0 5. Sie wird in zwei, in den Verticallinien durch die Auflagerpunkte A und B wirkende Componenten zerlegt, indem man die Durchschnittspunkte β, γ der äussersten Seilpolygonseiten mit jenen Verticalen unter sich verbindet, und zur Verbindungslinie eine Parallele C 6 durch den Pol C im Kräftepolygon zieht. 5 6 und 6 7 sind dann die in A und bezw. B wirkenden Auflager-Reactionen P_6, P_7 und zugleich die Druckspannungen in der Mauer unterhalb A und der Säule unter B.

Die Zahl der Knoten des Fachwerkes ist 7, die der Linien 11 (8 bis 18), also $2\nu - 3 = \lambda$, das Fachwerk ein statisch bestimmtes.

Um die Spannungen in den einzelnen Constructionstheilen desselben zu finden, beginnen wir beim Knoten a; man könnte aber auch mit dem A anfangen. Das jenem Knoten entsprechende Polygon ist das Dreieck mit den Seiten 1, 9, 8, das für die Linie 9 Zug- und für die Linie 8 Druckspannung ergibt. Auf den Knoten b übergehend, sind von dem, demselben entsprechenden Viereck zwei Seiten 9 und 2 bekannt, die anderen werden gefunden, wenn man durch den Endpunkt von 2

[1]) Vgl. Jenkin am oben (S. 186) angegebenen Ort, dann Maxwell in „Transactions of the royal society of Edinburgh", Dec. 1869, und Cremona „Le figure reciproche nella statica grafica" Fig. 11.

[2]) Vgl. Culmann „Graphische Statik", 1. Aufl., Taf. 19, und Cremona a. a. O. Fig. 9.

eine Parallele 11 zu **11** und durch den Anfangspunkt von 9 eine Parallele 10 zu **10** zieht. Das Viereck mit den Seiten 9, 2, 11, 10, ihren Sinn entsprechend dieser Reihenfolge genommen, gibt Grösse und Sinn der Spannungen in **11** und **10**, von denen jene Zug- und diese Druckspannung ist. Dem nächsten Knoten c entspricht das Viereck mit den Seiten 8, 10, 12, 13, von denen die erste und letzte in eine und dieselbe gerade Linie fallen. So fortfahrend ist das Diagramm in Fig. 49ª leicht zu vollenden.

§ **167.** In Fig. 50 Taf. XX betrachten wir endlich noch einen als Fachwerk construirten Krahn[1]), auf den die vertical abwärts gerichteten Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_9$ wirken. In P_5 ist die am Krahn hängende Last mitenthalten. Die Punkte A und B, in welchen der Krahn mit dem Boden verbunden ist, können verschieden betrachtet werden: 1) als Fixpunkte, oder 2) B als Fix- und A als Stützpunkt (im allgemeinen Sinn aufgefasst), dessen Normale die Richtung der Zugstange A i hat und 3) beide als Stützpunkte, wo dann die Normale für B die Richtung der Resultante der Druckspannungen in dem Pfosten B i und der Strebe B h haben und sich mit der verlängerten Zugstange A i in einem und demselben Punkt der Resultante der gegebenen Kräfte P_1 bis P_9 schneiden muss. Wir wollen von der ersten Auffassung ausgehen, dann ist das Fachwerk ein überflüssig befestigtes, und da die Anzahl seiner freien Knoten $\nu' = 9$ und die Anzahl seiner Linien $\lambda = 18$ ist, so ist $2\nu' = \lambda$, das Fachwerk also wieder statisch bestimmt.

Der Construction der Spannungen braucht weder die des Kräfte- noch des Seilpolygons aus den äusseren Kräften voranzugehen; doch haben wir in Figur 50ª die gegebenen äusseren Kräfte zum Polygon 0 1 2 ... 9 zusammengetragen. Die Construction muss beim Knoten a begonnen werden. Das ihm entsprechende Dreieck hat die Seiten 5, 14, 13, die in dieser Reihenfolge zu durchlaufen sind und für die Linie **14** Druck-, für die **13** Zugspannung ergeben. Dabei ist die Lage der neu zu zeichnenden Seiten 13 und 14 dadurch vorgeschrieben, dass 13 an die Kraft 4, die am Knoten b wirkt, und 14 an die Kraft 6, die am Knoten c wirkt, zu liegen kommen muss. Auf den Knoten b übergehend, erhält man das ihm entsprechende Viereck durch Ziehen der Parallelen 15 und 16 zu **15** und **16** bezw. durch den Endpunkt von 13 und Anfangspunkt von 4. Den Sinn der Spannungen in **15** und **16** gibt die Reihenfolge 4, 13, 15, 16. Dem folgenden Knoten c entspricht das Fünfeck mit den Seiten 15, 14, 6, 18, 17, von denen nur noch die letzten beiden zu zeichnen sind, deren Sinn obiger Reihenfolge zu entsprechen hat. Dem nächsten Knoten d gehört das Fünfeck mit den Seiten 3, 16, 17, 19, 20 zu u. s. w. f. in alphabetischer Reihenfolge der Knoten bis zu denen h und i. Der Knoten h, welchem das Viereck 26, 9, 10, 27 entspricht, gibt die Druckspannnngen in **27** und in der Strebe **10** oder B h, und das dem Knoten i entsprechende Sechseck mit den Seiten 1, 24, 25, 27, 11, 12, von denen nur die letzten beiden noch unbekannt sind, die Druckspannung in der Säule **11** oder B i und die Zugspannung in der Stange **12** oder A i. Eine Controle oder Genauigkeitsprobe findet also bis hierher nicht statt. Diese erhält man aber, wenn man überlegt, dass die in **10**, **11** und **12** wirkenden Spannungen, an den Knoten h und i angebracht, zusammen mit den äusseren Kräften $P_1, P_2 \ldots P_9$ das Fachwerk i h a im freien Gleichgewicht halten müssen. Sucht man also die Resultante der Kräfte P_1 bis P_9 mittelst des Kräftepolygons 0 1 2 ... 9 mit dem Pol C in Fig. 50ª und des Seilpolygons 0 I II ... IX X in Fig. 50ᵇ auf bekannte Weise, so müssen sich B h und die Resultante der Spannungen in **11** und **12** in einem und demselben Punkt β jener Resultante schneiden. Die Resultante der Spannungen in **11** und **12** muss also in die Verbindungslinie $i\beta$ fallen, und da sie im Kräftepolygon (Fig. 50ª) der Grösse, der Richtung und dem Sinn nach durch die Schlusslinie $0\beta'$ der Seiten 11 und 12 gegeben ist, so muss also $0\beta'$ parallel zu $i\beta$ werden.

Umgekehrt hätte man auch von Anfang an gleich die Resultante 0 9 der gegebenen äusseren Kräfte P_1 bis P_9, welche in der Linie $\alpha\beta$ liegt, die durch das Seilpolygon 0 I II ... X erhalten wird,

---

[1]) Vgl. Culmann „Graphische Statik", 2. Aufl., Fig. 9 u. 10 auf Taf. 10, und Cremona a. a. O. Fig. 12.

in drei Componenten zerlegen können, die in den Constructionstheilen B h, B i, A i wirken. Oder man hätte jene äusseren Kräfte, d. h. ihre Resultante, durch drei in diesen Constructionstheilen liegende Spannungen an den Knoten h und i ins freie Gleichgewicht setzen können. Zu dem Ende hätte man durch 9 eine Parallele $9\beta'$ zu B h und durch 0 eine Parallele $0\beta'$ zu $i\beta$ ziehen müssen; $9\beta'$, in diesem Sinne genommen, würde dann die Spannung in B h und $\beta'0$, in diesem Sinne genommen, die Resultante der Spannungen in B i und A i geworden sein; letztere hätte dann durch die Parallelen 11 und 12 zu B i und A i in die Spannungen dieser letzteren Constructionstheile zerlegt werden können. Das durch Anbringen der Spannungen in 10, 11 und 12 an den Knoten h und i ins freie Gleichgewicht gesetzte Fachwerk h i a ist dann immer noch ein statisch bestimmtes; die Zahl seiner Knoten, ν, ist 9, die seiner Linien, λ, gleich 15, also $2\nu - 3 = \lambda$. Die Construction der Spannungen würde dann mit dem Knoten h oder auch wieder mit dem Knoten a beginnen können; sie würde dieselbe Fig. 50ᵃ ergeben, aber am Schlusse würde man jetzt die gewöhnliche Genauigkeitsprobe erhalten.

ELEMENTE

DER

GRAPHISCHEN STATIK.

ATLAS.

Fig. 1

(§.§. 22–26, 33.)

a) b)

Fig. 2.

(§ 29.)

a) b)

Fig. 3.

(§.§. 30, 31.)

a) b)

Fig. 4.

(§§. 35, 66)

a) b)

Fig. 5.

(§§. 35, 66.)

a) b)

Fig. 6.

(§§. 35, 66.)

a) b)

Fig. 7. (§.36.)

Fig. 8. (§ 36)

Fig. 9. (§ 36)

Fig. 10 (§§ 36, 41)

Fig. 13. (§. 36)

Fig. 11 (§§ 36, 41)

Fig. 14 (§§ 36, 41)

Fig. 12. (§. 36.)

Fig. 15. (§§ 39, 54, 147)

a) b)

Fig. 16. (§§ 40, 46, 43, 55)

a) b)

Mafsstab

der Langen: 0,005 = 1m

" Krafte: 0,01 = 4000k

" Momente: 0,01 = 40000mk

Fig. 17. (§ 52)

a) b)

Fig. 19. (§ 64)

a) b)

Fig. 18.
(§ § 59, 61.)

Fig. 22. (§§. 92, 128.)

Fig. 23. (§§. 93, 139.)

Fig. 24. (S. 317.)

Fig. 25. (§ 110.)

Fig. 26. (§. 120.)

Fig. 27. (§§. 125, 126.)

Fig. 29. (§. 133.)

Fig. 28. (§. 132.)

Fig. 30.
(§ 134)

Fig. 31
(§ 135)

Fig. 32.
(§§ 136, 137)

Fig. 33.
(§ 140)

Fig. 34.

Fig. 35

Fig. 36. (§. 145.)

Fig. 37. (§. §. 151, 152.)

Fig. 37. c)

Maßstab
der Längen: 1cm = 1m,
" Kräfte: 1cm = 10 Tonnen,
" Momente: 1cm = 50 Meter-Tonnen

Fig. 38.
(§§ 153, 155, 156)

Fig. 39. (§§ 154, 155)

Maſsstab
der Längen: ½ cm = 1m
" Kräfte: ½ cm = 10 Tonnen,
" Momente: ½ cm = 100 Meter-Tonnen.

a) b)

Fig. 40.
(§§ 152, 157.)

Fig. 42.

Fig. 41.

Fig. 45.
(§ 162)

Maſsstäbe für Fig 45-46.
1cm = 2m
1cm = 4t

Fig 46.
(§ 163)

Fig. 47 (§. 164.)

Fig. 47a'. (§. 164.)

Maſsstäbe:
1cm = 2m
1cm = 8t

Fig. 48. (§. 165.)

b)

Fig. 50.
(§.167.)

a)

Fig. 49.
(§.166.)

b) a)

a)

Fig. 49.
(§.166.)

b)